

DIFFERENCIÁLEGYENLETEK AZ ÉLETBIZTOSÍTÁSBAN

Hingyi Balázs (Technical University of Denmark (DTU)), hingyi.balazs@hotmail.com

ÖSSZEFOGLALÓ

Ebben a dolgozatban az életbiztosítások aktuáriusi számolásainak alapjául szolgáló halálozási intenzitást vizsgáljuk a pénzügyi területeken használatos Cox–Ingersoll–Ross-modell segítségével. Felírjuk a modell momentumait és a pénzügyi számításokkal párhuzamot vonva a túlélési valószínűségeket is. Különböző módszerekkel megadjuk a diszkrét adatokból történő általános momentumok számítását is, amelyeket fel is használunk a modellek becsléséhez. Végül a felírt elméleti modell használhatóságát valós adatokon teszteljük különféle becslési módszerekkel, és megmutatjuk, hogy az általunk felírt modellel jellemezhető a 2017-es időskori magyar halandóság. A publikáció alapjául a BCE–ELTE közös Biztosítási és Pénzügyi Matematika mesterszakon írt szakdolgozat szolgált, amely alapján a szerzőnek ítélte a MAT a Biztosításmatematika Ifjú Mestere díjat.

SUMMARY

In this paper we study the mortality intensity that underlies the actuarial calculations of the life insurance contracts, by using stochastic methods according to the modern approach. We model the mortality intensity with the help of the Cox–Ingersoll–Ross model which is commonly used in finance. We calculate the moments of our model and in parallel with the calculations in finance we also give formulas of the survival probabilities. We provide different methods for the calculation of the moments from discrete data, and we use these to estimate our models. Finally, we test the useability of our theoretical model with real data by using different estimation methods, and we show that this model can be used to study the Hungarian old aged mortality of 2017. The publication is based on the thesis written in the Actuarial and Financial Mathematics joint Master's program of Corvinus University and Eötvös Loránd University. Based on the dissertation the Hungarian Actuarial Society (MAT) awarded the author the Young Master of Actuarial Mathematics.

Kulcsszavak: halálozási intenzitás modellezése, sztochasztikus differenciálegyenletek, CIR-modell, momentumok

Key words: mortality intensity modelling, stochastic differential equations, CIR-model, moments

JEL: C39, C53, G22, J10

DOI: 10.18530/BK.2021.3-4.92

<http://dx.doi.org/10.18530/BK.2021.3-4.92>

Bevezetés

Ebben a dolgozatban az életbiztosítási díj- és tartalékszámítások alapjául szolgáló halálozási intenzitás sztochasztikus differenciálegyenletek segítségével történő modellezésével foglalkozunk.

A klasszikus életbiztosítási díj- és tartalékkalkulációkban a halálozási intenzitás mindig determinisztikus. Ez a feltetelezés a gyakorlatban azonban nem teljesül, így a biztosítóknak csupán a halálozási intenzitás kapcsán is kétféle kockázattal kell szembenéznük. Kockázatot jelent, hogy a halálozási intenzitás nem a várakozásoknak megfelelően alakul, és az is, hogy a biztosított portfólió a biztosító számára kedvezőtlenül alakul. Dahl ezt a két kockázatot rendre szisztematikus és nem-szisztematikus mortalitási kockázatnak nevezte el (Dahl, 2014).

Determinisztikus halálozási intenzitás esetén a biztosítók úgy kezelik a szisztematikus mortalitási kockázatot, hogy pesszimistán, a saját szempontjukból biztonságosnak választják a halálozási intenzitást. A biztosítók a korábbi adatokból determinisztikus előrejelzésekkel és biztonsági tartalékkal határozták meg az intenzitásokat (Zeddouk & Devolder, 2020). Azonban ez sem jelent teljes biztonságot az életbiztosítások (jellemzően) hosszú időtartama miatt. Egy másik kezelési lehetőség a biztosítótársaságok számára, hogy a halálozási intenzitást sztochasztikusan modellezzik, így számszerűsíteni tudják és tervezhetővé teszik a szisztematikus mortalitási kockázatot (Dahl, 2014).

A dolgozatban ezt, a sztochasztikus modellezést, vizsgáljuk meg különböző szempontokból. A dolgozat első részében a szakirodalom segítségével felírunk egy általános sztochasztikus modellt, ennek része lesz a halálozási intenzitás, valamint egy adott szerződés alakulásának modellezése is. A vizsgálatunk fő tárgya a pénzügyekben is használatos Cox–Ingersoll–Ross-modell lesz (Cox, Ingersoll, & Ross, 1985). Arra vagyunk kíváncsiak, hogy a CIR-modellel felírt halálozási intenzitás mennyire van összhangban a tényleges adatokkal. Ennek motivációja Zeddouk és Devolder (2020) cikke, amelyben azt találták, hogy a kiterjesztett CIR-modellel szépen leírhatók a huszadik századi időskori belga halálozási adatok. Mi kíváncsiak vagyunk arra, hogy vajon az ennél egyszerűbb eredeti CIR-modell is alkalmas lehet-e erre a feladatra, ezt a 2017-es magyar halandósági táblán fogjuk letesztelni egy időskori modellt építve a [75,95] éves korintervallum felett.

A vizsgálatunk egyik központi eleme az L -lel jelölt élettartam lesz. Ez egy nemnegatív valószínűségi változó, amely eloszlásfüggvénye $F(t)=P(L<t)$. A későbbiekben praktikus lesz a túlélésfüggvény használata, amit $\bar{F}(t)$ -vel fogunk jelölni és $\bar{F}(t)=1-F(t)=P(L\geq t)$. A feltetelezésünk szerint az L élettartamot a háttérből a μ -vel jelölt halálozási intenzitás alakítja, melyet a következő rész elején pontosan definiálunk majd. Erről a μ halálozási intenzitásról feltesszük, hogy egy nemnegatív sztochasztikus folyamat, ezért elsőként ez vizsgáljuk majd meg alaposabban.

A dolgozat fő építőelemeit sorba véve elsőként a szakirodalom segítségével bemutatunk egy életbiztosítási díj- és tartalékszámításhoz használható általános sztochasztikus modellt.

Ezen belül áttekintjük a biztosítási szerződések alakulását, az ügyfelek viselkedését és a halálozási intenzitás sztochasztikus modellezését. Ezután rátérünk a CIR-moddal felírt halálozási intenzitás vizsgálatára a CIR-modell megoldásán keresztül. Itt kiszámoljuk a várható értéket, szórásnégyzetet és az általános k . momentumot is. A halálozási intenzitás vizsgálata után rátérünk az élettartam vizsgálatára. Az elemi kötvény árazására vonatkozó szakirodalmat alapul véve meghatározzuk a túlélési valószínűséget a CIR-modell paramétereinek a függvényeként. Ezek után pedig megadjuk az élettartam elméleti várható értékét és momentumait is. A dolgozat utolsó részében különböző becslési eljárások segítségével határozzuk meg a CIR-modell paramétereit. Végül a modellek összehasonlítása után megadjuk azt a becslési eljárást, amelyik a legpontosabb eredményt adja a 2017-es magyar halandósági adatok [75,95] éves korintervallumára.

1. Egy általános sztochasztikus modell

1.1. A sztochasztikusan modellezett mortalitás fejlődési útja

A determinisztikus és sztochasztikus életbiztosítási modellek közti átmenetre több példa is található az irodalomban. 1998-ban Marocco és Pitacco számszerűsíteni tudta a mortalitási kockázatot, amikor azt olyan Béta-eloszlással modellezték, ahol a paraméterek az életkortól és az időtől függték (Marocco & Pitacco, 1998). Olivieri a halálozási intenzitások lehetséges trendjeit úgy becsülte, hogy az ő függvényének változói is az idő és az életkor voltak (Olivieri, 2001). Ilyen módon realiztikusabb díjat lehetett meghatározni, mint abban az esetben, ha csak kortól függő függvénnyel becsülnénk a halálozási intenzitást. A becslésének eredménye a túlélésfüggvény egy lehetséges jövőbeli realizációja volt, így ahhoz, hogy meghatározhassa a szisztematikus mortalitási kockázatot, még szüksége volt egy-egy olyan függvényre, amelyek a nagyon magas, illetve nagyon alacsony jövőbeli túlélési valószínűségeket képviselik. A kockázat hatását jelenérték- és varianciaszámolások segítségével kapta a megalkotott három túlélésfüggvényt felhasználva (Olivieri, 2001).

Olivieri és Pitacco együtt már a nem-szisztematikus és szisztematikus mortalitási kockázatot külön-külön is meg tudta határozni azzal a modellel, amelyikben a vizsgált túlélésfüggvényt a lehetséges túlélésfüggvények egy parametrizált családjával írták le. Modelljükben a nem-szisztematikus mortalitási kockázatot a paraméterek véletlensége adta, míg a szisztematikus mortalitási kockázatot a paraméterek bizonytalanságából adódott (Olivieri & Pitacco, 2002).

1.2. Alapfogalmak

A következőkben bevezetünk egy olyan általános sztochasztikus modellt, ahol a halálozási intenzitást sztochasztikus folyamatként kezeljük a (Dahl, 2014), (Zeddouk & Devolder, 2020), (Buchardt & Møller, 2015) és (Christiansen & Djehiche, 2020) cikkek alapján.

Definíció. (Halálozási intenzitás)

μ_x az x éves korban a halálozási intenzitás, ahol

$$\mu_x = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{P(x < L \leq x + \delta | L > x)}{\delta}, \quad (1)$$

ahol az L valószínűségi változó az egyén élettartama.

Megjegyzés.

Lebesgue tétele alapján majdnem minden x -re teljesül, hogy $P(L < x + \delta | L \geq x) = \mu_x \delta + o(\delta)$, azaz a feltételes valószínűsége annak, hogy az adott egyén δ éven belül meghal, feltéve, hogy x éves korában még életben volt, arányos δ -val. Az arányossági tényező pedig pont a μ_x halálozási intenzitás (Móri, 2011).

A továbbiakban feltesszük, hogy a halálozási intenzitás is véletlen, és $\mu_{(x+t)} = \mu_x(t, \omega) = \mu_x(t)$ folytonos sztochasztikus folyamat az (Ω, \mathcal{F}, P) valószínűségi mezőn és adaptált az $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ természetes filtrációra nézve. A $\mu_x(t)$ kezdőpontja meghatározza a halálozási intenzitás dinamikáját egy sztochasztikus differenciálegyenleten (SDE) keresztül.

Következmény. (Túlélési valószínűség)

$${}_{T-t}p_{x+t} = \mathbf{E}_P \left[e^{-\int_t^T \mu_x(u) du} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (2)$$

Ez annak a valószínűsége, hogy egy x éves egyén, aki életben van az $x+t$ időpontban, még megél $T-t$ időt. Ha ismertek lennének a halálozási intenzitások, akkor egy $t=0$ pillanatban x éves egyén túlélési valószínűségét a t és T időpontok között az $e^{-\int_t^T \mu_x(u) du}$ kifejezés adná. A definícióban szereplő feltételes várható értékre azért van szükség, mert nem ismerjük a halálozási intenzitás jövőbeli fejlődését. \mathcal{F}_t interpretálható úgy, mint a biztosító számára rendelkezésre álló információ a t időpontban.

Definíció. (Affin mortalitási struktúra)

Ha rögzített x esetén a túlélési valószínűségek

$${}_{T-t}p_{x+t} = e^{A(t,x,T) - B(t,x,T)\mu_x(t)} \quad (3)$$

által adottak, ahol $A(t,x,T)$ és $B(t,x,T)$ determinisztikus függvények, akkor a halálozási intenzitások modellje affin mortalitási struktúrájú az x kohorszra.

Ha (3) minden x -re, akkor a modell affin mortalitási struktúrájú.

Megjegyzés.

Björk elemi kötvényárra vonatkozó tétele elégséges feltételt ad rögzített x mellett a mortalitási struktúra affinságára, míg az A és B függvényekre egy differenciálegyenlet-halmazt határoz meg (Björk, 1997), azonban általánosságban nem mondható el, hogy az A és B függvények expliciten meghatározhatóak lennének (Dahl, 2014). A dolgozatban azonban meg fogjuk tudni határozni az A és B függvényeket (39) és (40) alapján.

1.3. A biztosítási szerződés alakulása

Az életbiztosítási szerződések alakulását egy $Z=(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ \mathcal{F} -adaptált càdlàg (jobbról folytonos és baloldali határértékkel rendelkező) folyamat írja le egy véges $\mathcal{J}=\{0,1,\dots,J\}$ állapottéren. A Z folyamat tehát megadja egy szerződésre, hogy az a t időpontban milyen állapotban van. Ezek az állapotok pl.: a szerződő életben van, a szerződő meghalt, esetleg felmondta a szerződést, és hasonlók. A legegyszerűbb modell, ha $\mathcal{J}=\{0,1\}$, vagyis csak azt a két lehetőséget vizsgáljuk, hogy a szerződő még életben van-e vagy sem. A szakirodalomban több olyan cikk is található, amikor ennél több állapotot is figyelembe véve dolgoznak a szerzők (Christiansen & Djehiche, 2020), (Buchardt & Møller, 2015), (Bladt, Asmussen, & Steffensen, 2020), így lehetőség nyílik a valóságot jobban leíró modellek felállítására, ilyenek például a törlési, a rokkantsági vagy a munkanélküliségi modellek is.

Egy másik érdekes megközelítésben Buchardt és Møller (2015) azt mutatta meg, hogy a biztosítási kötvények tulajdonosainak, vagyis az ügyfelek viselkedésének a modellezése is jelentős változást jelenthet nemcsak a biztosítótársaságok jövőbeli pénzmozgásaira, de a portfóliójuk piaci értékére nézve is. A pénzmozgások előrejelzéseit vizsgálva megállapították, hogy egyszerű integrálokkal vagy közönséges differenciálegyenletekkel tudják módosítani az előrejelzéseket. A szerződők viselkedését véletlen átmeneti intenzitású Markov-modell segítségével írták le, ugyanakkor megjegyezték, hogy a valóságban a szerződő törlési vagy díjmentes leszállítási döntéseinek gyakran külső (gazdasági) oka van, de a szerződők ilyen jellegű döntései a szerződéseik értékétől függetlenül következtek be. A numerikus kísérleteik eredményeként elmondható, hogy a biztosítóknak érdemes lehet a szerződők döntéseit leíró modellek használata, mert így is nagymértékben csökkenthetők a kockázataik.

Gyakori feltételezés, hogy a Z folyamat Markov-folyamat, de születtek eredmények olyan általános esetekben is, amikor Z szemi-Markov tulajdonságú, azaz egy olyan $(U_t)_{0 \leq t \leq T}$ folyamattal együtt alkot Markov-folyamatot, ahol az U_t azt adja meg, hogy egy-egy szerződés mennyi időt töltött Z_t jelenlegi állapotban (Christiansen, 2012).

Ha $j, k \in \mathcal{J}$, akkor a j állapotból k állapotba való átmenetek számát az $N = (N_t^{jk})_{j,k} = \#\{u: u \in (0, t], Z_u = j, Z_u = k\}$ számláló folyamat adja meg. Bevezetve az $I_t^j = \mathbf{1}_{Z_t=j}$ indikátor folyamatot, azt mondhatjuk, hogy a számláló folyamat és az indikátor ugyanazt az információt tartalmazza, és ez az

információ nem más, mint a Z folyamat természetes filtrációjá által képviselt információ (Christiansen & Djehiche, 2020). Az előző tulajdonság a $Z_t = \sum_j I_t^j$ és az $I_t^j = I_0^j + \sum_{k:k \neq j} (N_t^{kj} - N_t^{jk})$ kapcsolatok miatt áll fent.

Markov-folyamat esetén a j állapotból k állapotba kerülés átmeneti intenzitása a $\lambda_t^{jk} = I_t^j \cdot R^{jk}$ sztochasztikus folyamat által definiált. Itt R^{jk} determinisztikus függvénye t -nek és az átmenetekre ható sztochasztikus folyamatoknak. A $\mathcal{J}=\{0,1\}$ esetben $R^{jk} = R^{jk}(t, \mu_{x+t})$, azaz csak a halálózási intenzitástól függ (Dahl, 2014).

Ha Z Markov-folyamat, akkor a λ_t átmeneti intenzitás és a Z_0 kezdőérték egyértelműen meghatározza Z eloszlását, ugyanakkor a fordított megközelítés továbbra is működik a nem-Markov-modelleknél, vagyis, ha Z -re semmilyen Markov-feltevést nem teszünk (Christiansen & Djehiche, 2020).

1.4. A halálózási intenzitás modellezése

A halálózási intenzitás sztochasztikus modellezésével számszerűsíthetővé válik a szisztematikus mortalitási kockázat, ezért Dahl (2014) a halálózási intenzitást diffúziós folyamatként modellezte úgy, hogy rögzített $x > 0$ esetén a halálózási intenzitások dinamikáját a

$$d\mu_{x+t} = \alpha(t, x, \mu_{x+t}) dt + \sigma(t, x, \mu_{x+t}) dB_t \tag{4}$$

sztochasztikus differenciálegyenlettel írta le, ahol a B_t Brown-mozgás a standard Wiener-folyamat az \mathcal{F} filtrációban. Ennek a modellnek egy speciális esete a Milevsky és Promislow által felállított átlaghoz visszatérő Brown–Gompertz-modell (Milevsky & Promislow, 2001).

Még realisabb képet adna, ha azt is feltennénk, hogy a halálózási intenzitásokat többféle úgynevezett mortalitási tényező befolyásolja, melyek mind eltérő módon fejtik ki a hatásukat. További feltételezés még, hogy a különböző korosztályokat érintő mortalitási tényezők is eltérő módon befolyásolják a halálózási intenzitásokat. Az ilyen modelleket a szakirodalomban hierarchikus modelleknek nevezik, melyekben a halálózási intenzitás dinamikáját a (4) vektorértékű kiterjesztése adja meg.

Hierarchikus struktúrát kapunk, ha az egyes Wiener-folyamatokat egy adott mortalitási tényező hatásaként értelmezzük, és a σ vektort oly módon határozzuk meg, hogy a Wiener-folyamat csak a megfelelő életkorokat befolyásolja (Dahl, 2014). Mi a továbbiakban azonban maradunk a (4) összefüggéssel adott dinamika mellett.

A halálózási intenzitások modellezése esetén elengedhetetlen azok pozitivitása. A pénzügyekben is használatos Cox–Ingersoll–Ross-modell (CIR-modell) (Cox, Ingersoll, & Ross,

1985) analógiájára felépített modell biztosítja ezt a szigorú pozitivitást (Dahl, 2014), (Zeddouk & Devolder, 2020). A kiterjesztett CIR-moddal felírt halálozási intenzitás dinamikáját a

$$(5) \quad d\mu_{x+t} = (a_t - b\mu_{x+t}) dt + \sigma\sqrt{\mu_{x+t}} dB_t$$

SDE adja meg, ahol $b, \sigma > 0$ és B_t a standard Brown-mozgás. Zeddouk és Devolder megmutatta, hogy a kiterjesztett CIR-moddal felírva a halálozási intenzitások affín struktúrájuk (Zeddouk & Devolder, 2020).

1.5. A kombinált modell

Ahhoz, hogy a biztosítónál minél kevesebb kockázat maradjon, fontos, hogy a pénzügyi piacot is sztochasztikusan modellezze (Milevsky & Promislow, 2001), (Dahl, 2014). A kombinált modell felírásához Dahl (2014) jelöléseit követve legyen $(\mathcal{G}_t)_{0 \leq t \leq T}$ a kockázatos és kockázatmentes eszközök által meghatározott természetes filtráció P -kiterjesztése, vagyis a természetes filtrációhoz még vegyük hozzá a P -nulla halmazok által generált σ -algebrát is.

$(\mathcal{H}_t)_{0 \leq t \leq T}$ legyen a biztosítási szerződések által meghatározott természetes filtráció P -kiterjesztése, vagyis $\mathcal{H}_t = \sigma\{Z_u; u \leq t\} \vee \mathcal{N} = \sigma\{N_u; u \leq t\} \vee \mathcal{N}$, ahol \mathcal{N} jelöli a P -nulla halmazok által generált σ -algebrát. Végül jelölje $(\mathcal{J}_t)_{0 \leq t \leq T}$ a halálozási intenzitások által meghatározott természetes filtráció P -kiterjesztését, vagyis $\mathcal{J}_t = \sigma\{\mu_{x+u}; u \leq t\} \vee \mathcal{N}$.

A kombinált sztochasztikus modellt az $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t \vee \mathcal{J}_t$ filtráció adja meg, itt feltesszük, hogy a gazdaság független a biztosítási szerződések és a halálozási intenzitás alakulásától, vagyis $\mathcal{G}_t \perp (\mathcal{H}_t, \mathcal{J}_t)$ (Dahl, 2014).

A kiterjesztett modell használata a biztosítónál fellépő összes kockázat mértékét csökkenteni tudja, de már az egyes részmodellek alkalmazásával is elérhető, hogy a biztosító eliminálni tudja a felmerülő kockázatait egy részét.

2. A halálozási intenzitás modellezése CIR-moddal

A Zeddouk és Devolder (2020) által használt kiterjesztett CIR-moddal dinamikájú halálozási intenzitásokat használó modelleknél egyszerűbbet kaphatunk, ha a halálozási intenzitások alakulását az eredeti CIR-moddal mintájára a

$$(6) \quad d\mu_{x+t} = a(b - \mu_{x+t}) dt + \sigma\sqrt{\mu_{x+t}} dB_t$$

SDE segítségével írjuk fel, ahol $a, b, \sigma > 0$ és B_t a standard Brown-mozgás.

2.1. A CIR-moddal megoldása

A CIR-moddal meghatározható μ_{x+t} várható értéke és szórása is. Legyen x rögzített és ezen x mellett jelölje $\mu_t := \mu_{x+t}$ és legyen $\mu_0 := \mu_x$.

2.1.1. A halálozási intenzitás várható értéke

A halálozási intenzitás dinamikájára felírt (6) kifejezés ekvivalens a következő feladattal:

$$\mu_t = \mu_0 + \int_0^t a(b - \mu_u) du + \int_0^t \sigma\sqrt{\mu_u} dB_u \quad (7)$$

Mind a két oldalon várható értéket véve:

$$\mathbf{E}\mu_t = \mathbf{E}\mu_0 + \mathbf{E}\left(\int_0^t a(b - \mu_u) du\right) + \mathbf{E}\left(\int_0^t \sigma\sqrt{\mu_u} dB_u\right) \quad (8)$$

Ezt részekre bontva:

$$\mathbf{E}\mu_0 = \mu_0, \quad (9)$$

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t a(b - \mu_u) du\right) = abt - a\mathbf{E}\left(\int_0^t \mu_u du\right) \quad \text{és} \quad (10)$$

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t \sigma\sqrt{\mu_u} dB_u\right) = 0. \quad (11)$$

Ahol az utolsó egyenlőség azért teljesül, mert a $\sigma\sqrt{\mu_u}$ integrandus progresszíven mérhető és négyzetesen integrálható, így az integrál martingáltulajdonságából következik, hogy a várható érték 0 lesz.

Ha a (8) feladatra alkalmazzuk a nemnegatív integrandusokra vonatkozó Fubini-tételt, akkor

$$\mathbf{E}\mu_t = \mu_0 + abt - a \int_0^t \mathbf{E}\mu_u du. \quad (12)$$

Vezessük be az $f(t) := \mathbf{E}\mu_t$ jelölést, ekkor

$$\begin{cases} f'(t) = ab - af(t) \\ f(0) = \mu_0 \end{cases} \quad (13)$$

egy inhomogén lineáris egyenletet kapunk f -re. Ennek megoldásához használhatjuk a Cauchy-formulát, így

$$f(t) = e^{\int_0^t -a ds} \left(\mu_0 + \int_0^t e^{-\int_0^s -a ds} \cdot ab ds \right), \quad (14)$$

$$\mathbf{E}\mu_t = f(t) = (\mu_0 - b)e^{-at} + b. \quad (15)$$

2.1.2. A halálozási intenzitás szórásnégyzete

A $D^2\mu_t = E\mu_t^2 - E^2\mu_t$ összefüggésből az előzőekből $E^2\mu_t$ kiszámolható, de még meg kell határozni $E\mu_t^2$ értékét. Elsőként írjuk fel az Itô-formulát μ^2 -re, ebből azt kapjuk, hogy

$$(16) \quad \mu_t^2 = \mu_0^2 + \int_0^t 2\mu_u d\mu_u + \frac{1}{2} \int_0^t 2 d[\mu]_u$$

Mind a két oldalon várható értéket véve és alkalmazva a nemnegatív integrandusokra vonatkozó Fubini-tételt

$$(17) \quad E\mu_t^2 = \mu_0^2 + \int_0^t (E(2ab + \sigma^2)\mu_u - 2aE\mu_u^2) du$$

A korábbi $f(t) = E\mu_t$ függvény mellé még vezessük be a $g(t) := E\mu_t^2$ függvényt, ekkor az előző egyenlet a következő inhomogén lineáris differenciálegyenlettel egyenértékű:

$$(18) \quad \begin{cases} g'(t) = (2ab + \sigma^2)f(t) - 2ag(t) \\ g(0) = \mu_0^2 \end{cases}$$

A megoldáshoz most is a Cauchy-formulát használjuk, így

$$(19) \quad g(t) = e^{\int_0^t -2a} \left(\mu_0^2 + \int_0^t e^{-\int_0^s -2a} \cdot (2ab + \sigma^2)f(s) ds \right)$$

$$(20) \quad E\mu_t^2 = \mu_0^2 e^{-2at} + (2ab + \sigma^2) \left(b \frac{1 - e^{-2at}}{2a} + (\mu_0 - b) \frac{e^{-at} - e^{-2at}}{a} \right)$$

A szórásnégyzet most már meghatározható, hasonlóan, mint Jafari és Abbasian (2017) cikkében:

$$(21) \quad D^2\mu_t = \mu_0 \frac{\sigma^2}{a} (e^{-at} - e^{-2at}) + \frac{\sigma^2}{2a} b(1 - e^{-at})^2$$

2.1.3. A halálozási intenzitás harmadik és k . momentuma

$$(22) \quad E\mu_t^3 = e^{\int_0^t -3a} \left(\mu_0^3 + \int_0^t e^{\int_0^s 3a} \cdot 3(ab + \sigma^2)E\mu_s^2 ds \right)$$

Mivel az általános k . momentum a következő módon vezethető le:

Felírva az Itô-formulát a μ_t^k -ra és a korábbi számítások gondolatmenetét használva, illetve, ha a korábbiakhoz hasonlóan bevezetjük az $f(t) := E\mu_t^k$ és $g(t) := E\mu_t^{k-1}$ függvényeket, akkor a várható értékre vonatkozó egyenlet ismét egy inhomogén lineáris differenciálegyenletté alakítható.

$$(23) \quad \begin{cases} f'(t) = k \left(ab + \frac{k-1}{2} \sigma^2 \right) g(t) - kaf(t) \\ f(0) = \mu_0^k \end{cases}$$

A megoldáshoz most is használhatjuk a Cauchy-formulát, így végül

$$E\mu_t^k = e^{\int_0^t -ka} \left(\mu_0^k + \int_0^t e^{\int_0^s ka} \cdot k \left(ab + \frac{k-1}{2} \sigma^2 \right) E\mu_s^{k-1} ds \right). \quad (24)$$

A CIR-modell k . momentum tehát a fenti összefüggés segítségével rekurzívan meghatározható a $k-1$. momentumot felhasználva.

3.A túlélési valószínűség meghatározása

3.1. Differenciálegyenlet a túlélési valószínűségre

Rögzített x esetén

$$M(t, x) := E_P \left(e^{-\int_0^T \mu_{x+u} du} \middle| \mathcal{F}_t \right) = e^{-\int_0^t \mu_{x+u} du} {}_{T-t}p_{x+t}. \quad (25)$$

Erről könnyen látható, hogy martingál a P mérték alatt. Az $M(t, x)$ martingál által meghatározott mennyiség egy x éves személynek az x és $x+T$ éves kor közötti túlélési valószínűségét adja meg, ha adottnak vesszük a halálozási intenzitás alakulását t -ig. Az egyszerűbb jelölések kedvéért legyen a következőkben p a túlélési valószínűség függvénye, azaz rögzített x mellett $p(t, \mu, T) := {}_{T-t}p_{x+t}$.

Tegyük fel, hogy p a t -ben egyszer, míg a μ -ben kétszer folytonosan differenciálható, ekkor rögzített x esetén az Itô-formulát használva az M martingálra a

$$\begin{cases} \partial_t p + a(b - \mu)\partial_\mu p + \frac{1}{2}(\sigma^2\mu)\partial_\mu^2 p - \mu p = 0 \\ p(T, \mu, T) = 1 \end{cases} \quad (26)$$

másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet (PDE) írható fel a túlélési valószínűségekre (Dahl, 2014). A (26) együtthatómátrixa az

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^2 \end{bmatrix}$$

Mivel $1/2 \sigma^2 \mu > 0$, hiszen $\sigma > 0$ a CIR modell felírása miatt és $\mu > 0$, hiszen halálozási intenzitás, ezért az A együtthatómátrix pozitív szemidefinit és csak egy 0 sajátértéke van, így a PDE parabolikus.

3.2. Kitekintés: elemi kötvény árazása CIR-modellel

A kamatrátára vonatkozó CIR-modell

$$(27) \quad dr(t) = a(b - r(t)) dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t),$$

ahol W a standard Wiener-folyamat (Cox, Ingersoll, & Ross, 1985).

Az elemi kötvény árazásához feltehető, hogy az árfolyamat a következő alakban írható fel

$$(28) \quad P(t, r, T) = \alpha(t, T)e^{-r(t)\beta(t, T)},$$

valamely α és β függvényekre. Továbbá megmutatható (Björk, 1997), hogy kielégíti a következő parciális differenciálegyenletet:

$$(29) \quad \begin{cases} \partial_t P + a(b - r)\partial_r P + \frac{1}{2}(\sigma^2 r)\partial_r^2 P - rP = 0, \\ P(T, r, T) = 1. \end{cases}$$

Ebbe a (29) feladatba, ha behelyettesítjük a feltételezett (28) alakot, akkor az α és β függvények kifejezhetők a CIR-modell paramétereivel (Sinkala, Leach, & O'Hara, 2008)

$$(30) \quad \alpha(t, T) = \left(\frac{2he^{(h+a)(T-t)/2}}{2h + (h+a)(e^{h(T-t)} - 1)} \right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}},$$

$$(31) \quad \beta(t, T) = \frac{2(e^{h(T-t)} - 1)}{2h + (h+a)(e^{h(T-t)} - 1)},$$

$$(32) \quad h = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}.$$

3.3. A túlélési valószínűség felírása az elemi kötvény árának analógiájaként

Az esetünkben a túlélési valószínűség megfeleltethető az elemi kötvény árának. A korábbiakból is láttuk, hogy a CIR modell megfelel az affin struktúrának (Duffie, Filipovic, & Schachermayer, 2003), (Zeddouk & Devolder, 2020), így a korábbi jelölések kapcsolatba hozhatók:

$$(33) \quad P(t, r, T) = \alpha(t, T)e^{-r(t)\beta(t, T)},$$

$$(34) \quad p(t, \mu, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)\mu_t},$$

$$\alpha = e^A, \tag{35}$$

$$A = \ln \alpha, \tag{36}$$

$$B = \beta. \tag{37}$$

Tehát a túlélési valószínűség is kifejezhető a CIR-modell paramétereinek a segítségével, mégpedig

$$p(t, \mu, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)\mu_t}, \tag{38}$$

$$A = \frac{2ab}{\sigma^2} \ln \left(\frac{2he^{(h+a)(T-t)/2}}{2h + (h+a)(e^{h(T-t)} - 1)} \right), \tag{39}$$

$$B = \frac{2(e^{h(T-t)} - 1)}{2h + (h+a)(e^{h(T-t)} - 1)}, \tag{40}$$

$$h = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}. \tag{41}$$

4. Az élettartam várható értéke és momentumai

Jelöljük az élettartamot továbbra is az L nemnegatív valószínűségi változóval, az eloszlásfüggvényét $F(t)$ -vel, míg a túlélésfüggvényét $\bar{F}(t)$ -vel.

Definíció. (Felső végpont)

$\omega_{\bar{F}} = \sup\{t: F(t) < 1\}$, az eloszlás felső végpontja.

Megjegyzés.

Az ω felső végpont vagy más néven a statisztikákban még megjelenített legmagasabb életkor a 2017-es magyar halandósági tábla esetén a 110 éves életkor.

Az élettartam várható értékét és momentumait a következő módon kaphatjuk meg:

$$EL = \int_0^{\infty} t dF(t) = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt, \tag{42}$$

$$EL^k = \int_0^{\infty} t^k dF(t) = \int_0^{\infty} kt^{k-1}\bar{F}(t) dt. \tag{43}$$

A túlélési valószínűség definíciójából adódik, hogy

$${}_{T-t}p_{x+t} = \mathbf{E} \left[e^{-\int_t^T \mu_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right], \tag{44}$$

$${}_t p_x = \mathbf{E} \left[e^{-\int_0^t \mu_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \stackrel{\text{m}}{=} e^{-\int_0^t \mu_s ds} = \bar{F}(t). \tag{45}$$

$e^{-\int_0^t \mu_s ds}$ \mathcal{F}_t -mérhető

Valamint azt is láttuk, hogy affin mortalitási struktúra esetén

$$(46) \quad {}_{T-t}p_{x+t} = p(t, \mu, T) = e^{A(t,T)-B(t,T)\mu t},$$

$$(47) \quad {}_t p_x = p(0, \mu, t) = e^{A(0,t)-B(0,t)\mu_0}.$$

Tehát így az

$$(48) \quad EL = \int_0^\infty \bar{F}(t) dt = \int_0^\infty {}_t p_x dt = \int_0^\infty e^{A(0,t)-B(0,t)\mu_0} dt \text{ és}$$

$$(49) \quad EL^k = \int_0^\infty kt^{k-1} \bar{F}(t) dt = \int_0^\infty kt^{k-1} {}_t p_x dt = \int_0^\infty kt^{k-1} e^{A(0,t)-B(0,t)\mu_0} dt$$

integrálokat kell kiszámolnunk.

Ha azt feltételezzük, hogy a μ halálózasi intenzitás CIR-modellel írható le, akkor a kiszámolandó integrálok a következő alakot öltik:

$$(50) \quad EL = \int_0^\infty e^{A(0,t)-B(0,t)\mu_0} dt = \\ = \int_0^\infty \left(\frac{2he^{(h+a)\frac{t}{2}}}{2h + (h+a)(e^{ht} - 1)} \right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{2(e^{ht} - 1)}{2h + (h+a)(e^{ht} - 1)} \cdot \mu_0\right) dt$$

$$(51) \quad EL^k = \int_0^\infty kt^{k-1} e^{A(0,t)-B(0,t)\mu_0} dt = \\ = \int_0^\infty kt^{k-1} \left(\frac{2he^{(h+a)\frac{t}{2}}}{2h + (h+a)(e^{ht} - 1)} \right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{2(e^{ht} - 1)}{2h + (h+a)(e^{ht} - 1)} \cdot \mu_0\right) dt$$

Megjegyzés.

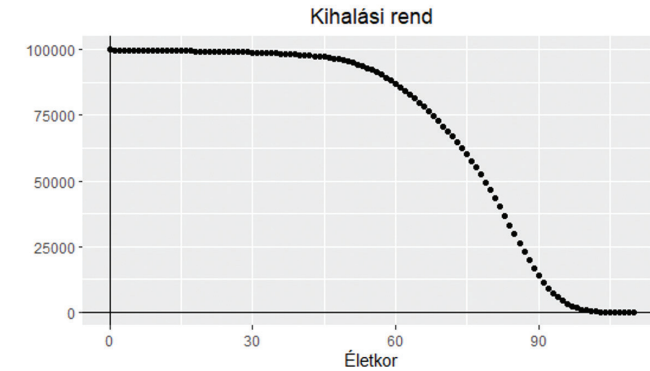
A gyakorlatban (50) és (51) esetén nem változik az eredmény, ha az integrálás felső korlátjának az ω -t adjuk meg, ez a magyar adatok esetén $\omega=110$.

5. Halandósági táblából számolt várható érték és momentum

5.1. Halandósági táblák

Az életbiztosítás legfontosabb aktuáriusi számolásaihoz az adatok a halandósági táblákból nyerhetők ki. Ezek a táblák összefoglalják egy adott veszélyközösség (általában ország) életbiztosítási szempontból is releváns demográfiai alapadatait. Megtalálható a táblában az egyes életkorokhoz tartozó halálózasi valószínűség, az adott életkorban elhunytak száma, a várható hátralévő élettartam és a kihalási rend is (1. ábra), amely az x éves korban még életben lévők számát adja meg egy 100 000 fős populációra vetítve. Fontos megjegyezni, hogy a statisztikai hivatalok által publikált halandósági táblák úgynevezett periódus táblák, ezek egy adott időpontban érvényes statisztikákból készülnek, azaz több együttélő generációra vonatkozó pillanatfelvételt jelenítenek meg.

1. ábra: A 2017-es magyar kihalási rend



Forrás: saját szerkesztés

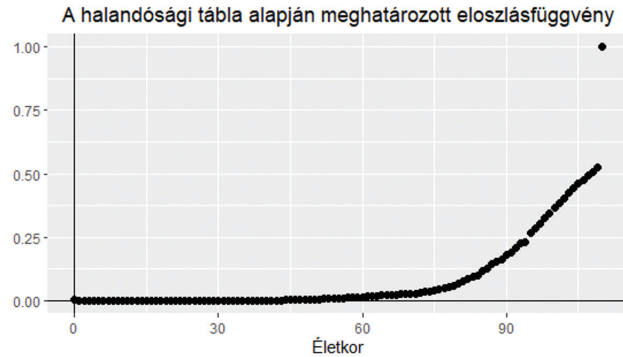
Praktikusabb és pontosabb eredmény kapható a kohorsz vagy generációs halandósági táblák alapján, mivel ezek egy adott évben született egyének életútját kísérik végig, de ezen táblák hátránya, hogy mire teljesek lesznek, addigra az adott generáció már kihalt és így az adatai is gyakran elévülhetnek (Banyár, 2016).

Pontos kohorsz táblákat ugyan csak utólag lehet készíteni a kihalt generáció adatai alapján, de halandóság-előrejelző módszerekkel a jelenleg élő generációkra is megbecsülhető. A legismertebb ilyen módszerek a Lee-Carter-modell (Lee & Carter, 1992) és a Cairns-Blake-Dowd-modell (Cairns, Blake, & Dowd, 2006), ezek a modellek statisztikai módszerekkel becsülik a jövőbeli halandósági adatokat.

A számolásokhoz használt periódus halandósági táblát a The Human Mortality Database oldaláról vettük (The Human Mortality Database, 2021), itt megtalálhatóak a magyar halandósági táblák is, a legfrissebb a 2017-es tábla. A számolások és becslések megkezdése előtt az adatok megismerése céljából is érdemes ábrázolni az eloszlásfüggvényt, ez látható a 2. ábrán. A

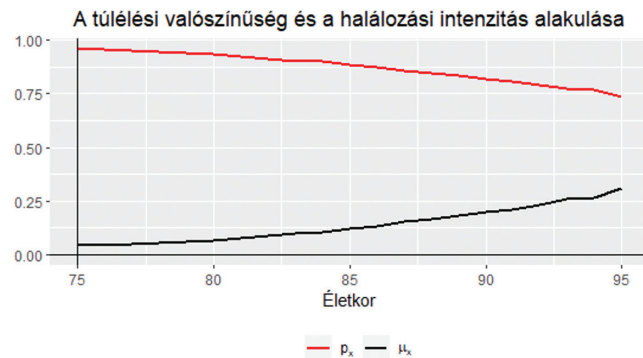
dolgozat szempontjából kiemelt fontosságú még a túlélési valószínűség és a halálozási intenzitás. Ezek alakulását a 3. ábra mutatja 75 és 95 éves kor között. Azért ezen a kortartományon került ábrázolásra ez a két mutató, mert a későbbiekben a becsléseinket ezen korok között fogjuk elvégezni.

2. ábra: Eloszlásfüggvény 0 és 110 éves kor között.



Forrás: saját szerkesztés

3. ábra: 75 és 90 éves kor közötti túlélési valószínűség és a halálozási intenzitás alakulása a kor függvényében



Forrás: saját szerkesztés

5.2. Momentumok a diszkrét adatokból

Jelölje $mom_k(x_0)$ a halandósági tábla adatai alapján számított x_0 éves kori k . momentumot. A korábbiakban a momentumokra kapott képletek és összefüggések folytonos túlélési függvény esetén alkalmazhatók, de a halandósági táblában diszkrét időpontokra vonatkozó adatok szerepelnek. Az élettartam momentumait (Chakraborti, Schoemer Jardim, & Epprecht, 2017) alapján a következő képletek segítségével számolhatjuk ki:

$$mom_1(x_0) = \sum_{t=0}^{\omega-x_0} P(L > t) = \sum_{t=1}^{\omega-x_0} p_0 \cdot \dots \cdot p_{t-1}, \tag{52}$$

$$mom_k(x_0) = \sum_{t=0}^{\omega-x_0} ((t+1)^k - t^k) P(L > t) = \sum_{t=1}^{\omega-x_0} ((t+1)^k - t^k) p_0 \cdot \dots \cdot p_{t-1}. \tag{53}$$

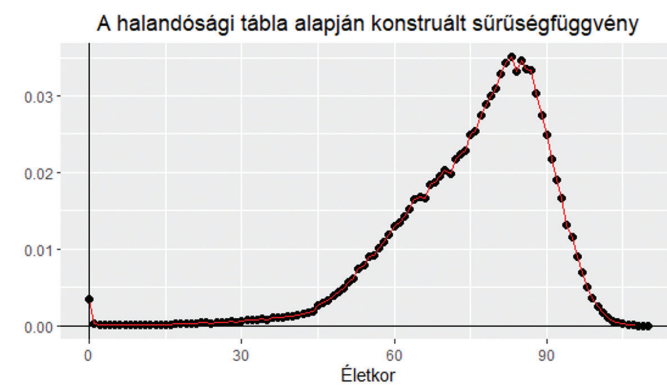
Egy másik módszerhez a momentumok meghatározására először a diszkrét sűrűségfüggvényt kell megadnunk. Ez legyen $f(x_0 + t) := \frac{l_{x_0+t} - l_{x_0+t-1}}{l_{x_0}}$, itt l_x a kihalási rendet jelöli.

A halandósági tábla adataiból számolt sűrűségfüggvény képét a 4. ábra mutatja. Ekkor a momentumok

$$mom_1(x_0) = \sum_{t=0}^{\omega-x_0} f(x_0 + t) \cdot t, \tag{54}$$

$$mom_k(x_0) = \sum_{t=0}^{\omega-x_0} f(x_0 + t) \cdot t^k. \tag{55}$$

4. ábra: Sűrűségfüggvény a halandósági tábla alapján



Forrás: saját szerkesztés

6. Paraméterbecslések

Ebben a szakaszban a 2017-es magyar halandósági tábla adatait próbáljuk megbecsülni a korábbiakban bemutatott CIR-modellt követő halálozási intenzitás segítségével. A becslések összehasonlíthatósága miatt minden becslést a [75,95] éves korintervallumon fogunk elvégezni. A korábbi jelöléseket használva így most $x_0=75$ és $\omega=95$.

A most bemutatandó becsléseink esetén minden esetben azt feltételezzük, hogy a tényleges halálozási intenzitás egy eredeti CIR-modell segítségével leírható. A becslések célja tehát ezen CIR-modell a, b, σ paramétereinek a becslése. A számítások során a $\theta = [a, b, \sigma]$, illetve a $\theta = [a, b, \sigma, \mu_0]$ vektorokat becsljük numerikus minimalizálás segítségével. Különböző becslésekhez a halandósági tábla különböző adatait használjuk fel, de a végső eredmények bemutatása és összehasonlítása a túlélési valószínűségek útján fog megtörténni a (38) - (40) egyenletek felhasználásával.

Megjegyzés.

A későbbiekben használni fogjuk a $\mu_0 = \mu_{x_0} = \mu_{75}$ kezdeti vagy kiinduló halálozási intenzitást ismert és ismeretlen paraméterként is. Abban az esetben, amikor ismertnek tesszük fel, akkor a halandósági tábla diszkrét adatainak a segítségével közelítjük a következőképpen: $\mu_{x_0} \approx -\ln(p_{x_0})$ (Zeddouk & Devolder, 2020).

6.1. A becslési módszerekről

6.1.1. Legkisebb négyzetes becslés

A kiinduló, referenciának is mondható becslési módszer a (Zeddouk & Devolder, 2020) cikkben is alkalmazott legkisebb négyzetes becslés (OLS becslés) lesz, amelyet magukra a túlélési valószínűségekre fogunk elvégezni. Zeddouk és Devolder a ${}_t p_x(\theta)$ függvényt becsülte, ahol θ a modell paramétereinek a vektorát jelöli. A mi esetünkben ${}_t p_x = p(0, \mu, t) = e^{A(0,t) - B(0,t) \mu_0}$, ahol A és B (39) és (40) által meghatározott.

Jelölje ${}_t \hat{p}_x$ a halandósági tábla adataiból számolt túlélési valószínűségeket, akkor az OLS becslés a következő feladat megoldásaként kapható:

$$(56) \quad \min_{a,b,\sigma} \sum_{t=0}^{\omega-x_0} ({}_t p_x - {}_t \hat{p}_x)^2.$$

A későbbiekben a következő két OLS becsléssel meghatározott modellt vizsgáljuk majd:
modell-1: az (56) minimalizációs feladat eredményeként kapott modell, melyben a $\mu_0 (= \mu_{75})$ ismert paraméterként van kezelve.

modell-2: az (56) minimalizációs feladat egy módosított formájának a megoldásaként adódik, melyben a $\mu_0 (= \mu_{75})$ ismeretlen paraméterként van kezelve. Ekkor a megoldandó probléma a

$$(57) \quad \min_{a,b,\sigma,\mu_0} \sum_{t=0}^{\omega-x_0} ({}_t p_x - {}_t \hat{p}_x)^2.$$

6.1.2. Momentum becslési módszer

A momentumokon alapuló becslési módszer lényege, hogy az ismeretlen paraméterek segítségével meghatározott elméleti momentumokat egyenlővé tesszük a mintából számolt momentumokkal, és az így kapott egyenletrendszert oldjuk meg a paraméterekre. A mi esetünkben a CIR-modell melletti momentumok az (50) - (51) egyenletek segítségével kerültek meghatározásra. A feladatunk tehát a

$$\begin{cases} mom_1 = EL(\theta) \\ \vdots \\ mom_k = EL^k(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mom_1 - EL(\theta) = 0 \\ \vdots \\ mom_k - EL^k(\theta) = 0 \end{cases} \quad (58)$$

egyenletrendszer megoldása, ahol θ ismét az ismeretlen paraméterek vektorát jelöli. Az egyenletrendszer k darab egyenletből áll, ez a k érték az ismeretlen paraméterek számával egyezik meg.

Az (50) - (51) egyenletekből analitikus úton nem határozható meg a, b és σ , így az egyenletrendszert numerikus úton kell megoldani. Ezekben az esetekben is meg fogjuk becsülni úgy a modelljeinket, hogy a μ_0 paramétert is ismeretlen paraméterként kezeljük. A megoldási ötlet, hogy az (58) jobb oldalán található eltérések (valamilyen függvényének) összegét minimalizáljuk. Ezek alapján a következő modelleket különböztetjük meg:

modell-3: μ_0 adott paraméter ($k=3$) és az abszolút eltérések összegét minimalizáljuk.

$$\min_{a,b,\sigma} (|mom_1 - EL| + |mom_2 - EL^2| + |mom_3 - EL^3|) \quad (59)$$

Az egyre magasabb rendű momentumok egyre nagyobb nagyságrendű számokat is jelentenek, ami befolyásolhatja a becslést olyan módon, hogy sokkal jobban figyelembe veszi a magasabb rendű momentumokhoz való illeszkedést, mint az alacsonyabbakhoz. Erre jelenthet megoldást, ha a hibafüggvényben normalizálást is alkalmazunk.

modell-4: μ_0 adott paraméter ($k=3$) és az abszolút eltérések normalizált összegét minimalizáljuk.

$$\min_{a,b,\sigma} \left(\frac{|mom_1 - EL|}{mom_1} + \frac{|mom_2 - EL^2|}{mom_2} + \frac{|mom_3 - EL^3|}{mom_3} \right) \quad (60)$$

modell-5: μ_0 ismeretlen paraméter ($k=4$) és az abszolút eltérések normalizált összegét minimalizáljuk.

$$\min_{a,b,\sigma,\mu_0} \left(\frac{|mom_1 - EL|}{mom_1} + \frac{|mom_2 - EL^2|}{mom_2} + \frac{|mom_3 - EL^3|}{mom_3} + \frac{|mom_4 - EL^4|}{mom_4} \right) \quad (61)$$

Utolsóként az OLS becsléshez hasonlóan az eltérések négyzetösszegét minimalizáló momentum becslést is meghatározzuk majd.

modell-6: μ_0 adott paraméter ($k=3$) és az eltérések négyzetösszegét minimalizáljuk.

$$(62) \quad \min_{a,b,\sigma} ((mom_1 - EL)^2 + (mom_2 - EL^2)^2 + (mom_3 - EL^3)^2)$$

Megjegyzés.

A fentiekben leírt modellekben ismeretlen μ_0 esetén csak az abszolút eltérések normalizált összegét minimalizáló esetet futtattuk le. Ennek oka, hogy a modellfuttatások során ez a típus adta a legjobb eredményeket.

6.2. Becslési eredmények

A becslési eljárás során az előzőekben felírt 6 modell minimalizálási feladatát **R**-ben végeztük el. A numerikus optimalizálások során a kezdeti értékeket iterálva jutottunk el a most bemutatásra kerülő eredményekig, amelyek az 1. táblázatban láthatóak.

1. táblázat: A paraméterbecslések eredményei

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	μ_0
modell - 1	0,073	0,275	0,165	adott
modell - 2	0,029	0,558	0,017	0,007
modell - 3	0,037	0,471	0,092	adott
modell - 4	0,023	0,592	0,022	adott
modell - 5	0,030	0,667	0,052	0,010
modell - 6	0,025	0,635	0,006	adott

Forrás: saját táblázat

A becslések eredményeként kapott paraméterek segítségével kiszámolhatóak az $x_0=75$ éves korra normált túlélési valószínűségek. Ezt a – 75 éves korban 1-ből induló – túlélésfüggvényt jelöljük $\bar{F}_{75}(t)$ -vel.

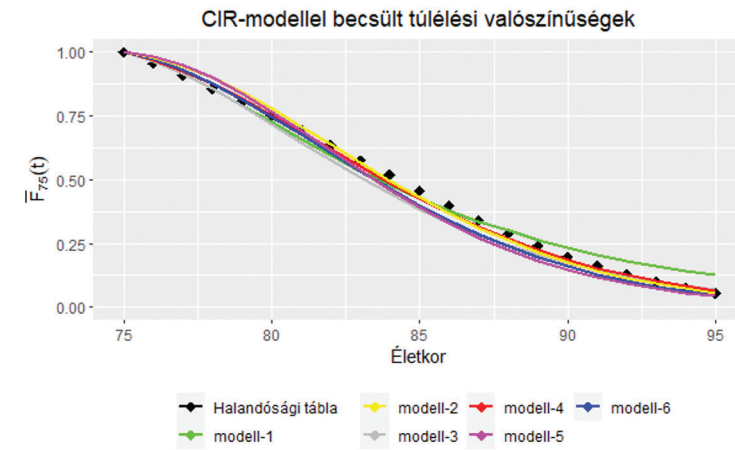
Megjegyzés.

$$\bar{F}_{x_0}(t) := \frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(x_0)} = \frac{P(L \geq t)}{P(L \geq x_0)}, \quad \text{ahol } t \geq x_0.$$

Azaz $\bar{F}_{x_0}(t) = P(L \geq t | t \geq x_0)$.

Az 5. ábrán látható egyszerre az összes modellünk viszonya egymáshoz és a halandósági tábla alapján meghatározott túlélési valószínűségekhez. Ennek alapján az látható, hogy a modellek többsége meglehetősen közel van az eredeti adatokhoz.

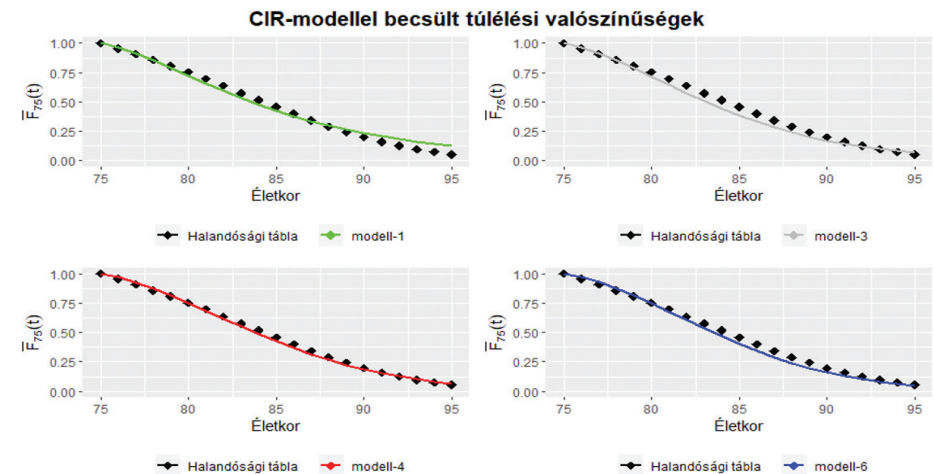
5. ábra: A becslési eredmények és a halandósági tábla adatainak a viszonya



Forrás: saját szerkesztés

A további vizsgálódáshoz a modelleket egyesével is ábráztuk, hogy kivehetőbbek legyenek az eltérések. A 6. ábra alapján már jobban kivehető, hogy azon modellek esetében, amikor a becslés során a μ_0 értéket adott paraméternek tekintettük, akkor a relatív abszolút eltérések minimalizáló **modell-4** alapján számolt túlélési valószínűségek közelítik meg leginkább a halandósági tábla adatai alapján meghatározottat.

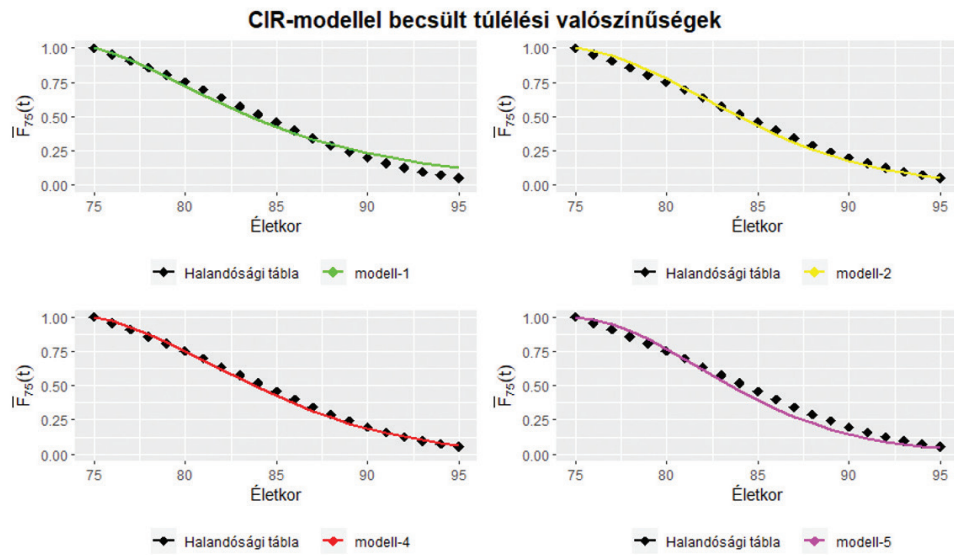
6. ábra: Az ismert μ_0 paraméterrel becsült modellek eredménye



Forrás: saját szerkesztés

A 7. ábra segítségével össze tudjuk hasonlítani azokat az eseteket, amikor a μ_0 paraméter ismertnek (*modell-1 és modell-4*), illetve ismeretlennek (*modell-2 és modell-5*) vettük a becslésünk során

7. ábra: : Az ismert és ismeretlen μ_0 paraméterrel becsült modellek eredményének összehasonlítása



Forrás: saját szerkesztés

6.3. Becslési hibák

Az 5.-7. ábrákon is látszik, hogy nem mindegyik modellel lehet ugyanolyan pontossággal megbecsülni a túlélési valószínűségeket. Az is nagy magabiztossággal állítható, hogy a legnagyobb eltérések a tényleges és becsült értékek között a vizsgált intervallum közepén vannak. Pontosabb képet a becsléseink jóságáról a becslési hibák vizsgálatával kaphatunk. A 2. táblázatban a becsült és tényleges valószínűségek közti eltérések néhány fontosabb mutatóját foglaltuk össze az egyes modellekre. Az összefoglaló táblázatban az eltéréseket 76 éves kortól kezdődően vizsgáltuk, hiszen az $x_0=75$ éves korban a normalizált valószínűségek minden esetben 1-et vesznek fel.

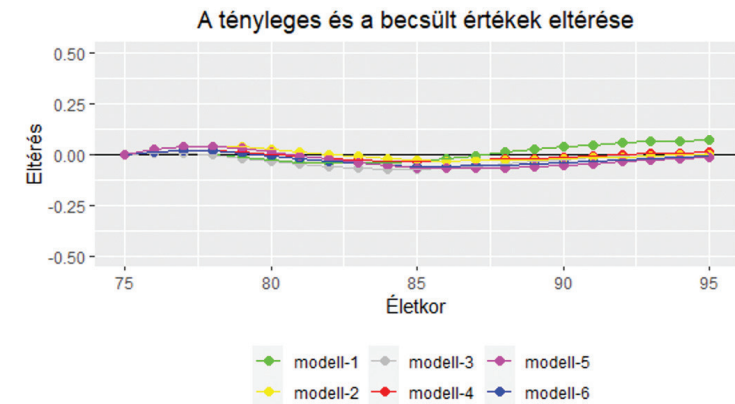
2. táblázat: A becsült és tényleges túlélési valószínűségek eltéréseinek összefoglalása az egyes becslési modellek esetén

	Az eltérések		
	minimuma	átlaga	maximuma
modell - 1	0,003	0,031	0,070
modell - 2	0,001	0,020	0,041
modell - 3	0,003	0,032	0,074
modell - 4	0,000	0,015	0,033
modell - 5	0,004	0,038	0,070
modell - 6	0,005	0,029	0,059

Forrás: saját táblázat

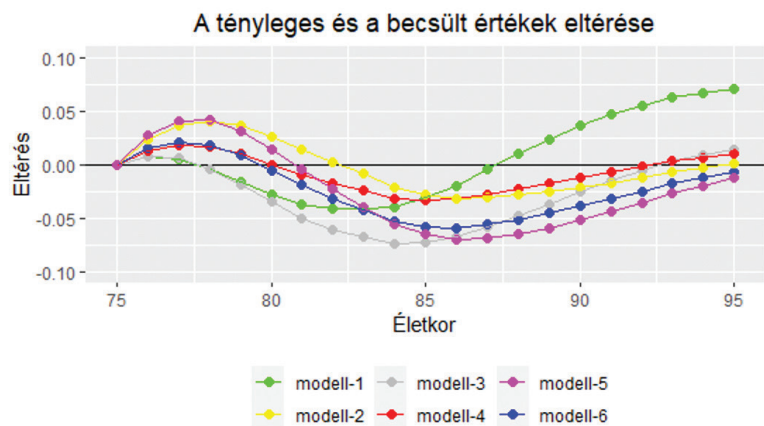
A 8. ábra alapján is az látszik, hogy a becslési modellek hibája végig közel van a 0-hoz, és ha ebbe az ábrába belenagyítunk, akkor is fenntarthatjuk ezt az állítást, de ekkor már láthatóvá válnak az egyes modellek hibái közti különbségek is (9. ábra).

8. ábra: A tényleges és becsült túlélési valószínűségek eltérése



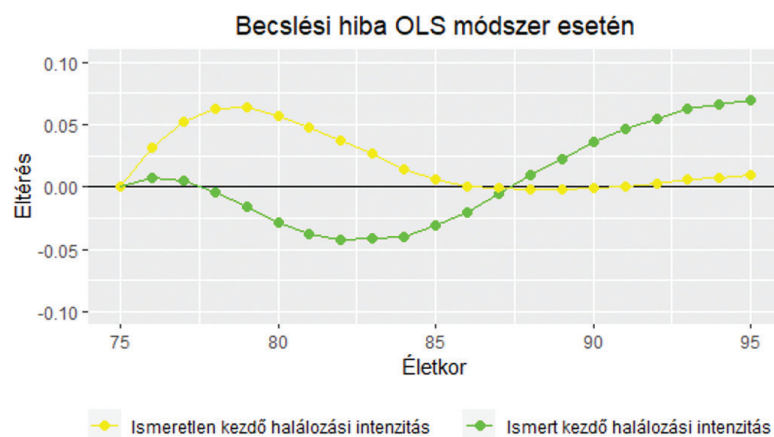
Forrás: saját szerkesztés

9. ábra: A tényleges és becsült túlélési valószínűségek eltéréseinek szemléltetése a különböző modellek esetén



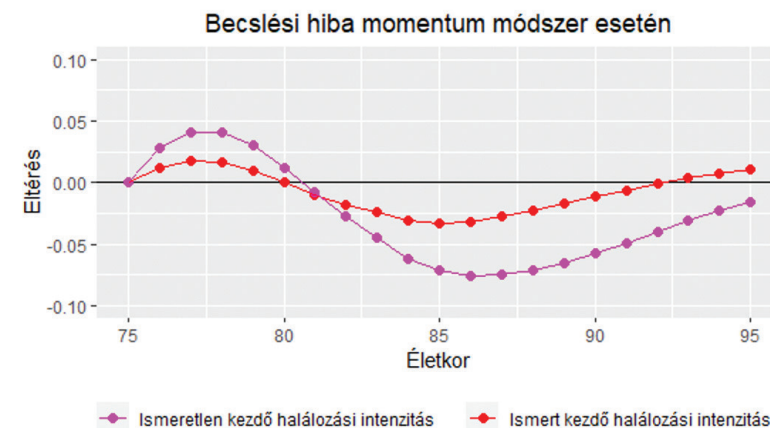
Forrás: saját szerkesztés

10. ábra: Az OLS becslés hibái ismert és ismeretlen μ_0 esetén



Forrás: saját szerkesztés

11. ábra: A momentum becslés eltérései ismert és ismeretlen μ_0 esetén



Forrás: saját szerkesztés

Érdekes még megvizsgálni, hogy mennyiben tér el azon modellek esetén a becslési hiba, amelyek csupán abban különböznek egymástól, hogy a μ_0 paramétert ismertnek, illetve ismeretlennek tekintik. A 10. ábráról az olvasható le, hogy az OLS becslés esetén magasabb életkorokra pontosabb értékeket kapunk akkor, ha a μ_0 kezdeti halálozási intenzitást is ismeretlen paraméterként kezeljük, míg az alacsonyabb életkorok esetén pont ez a modell lesz a pontatlanabb. A normalizált abszolút hibaösszeget minimalizáló momentum becslés esetén ismert kezdeti halálozási intenzitást feltételezve a becsléseink minden életkorra pontosabbak lesznek, mint akkor, amikor μ_0 -t ismeretlen paraméterként kezeljük (11. ábra).

A becslési hibák vizsgálata után is megerősítést nyer a korábban már megemlített állítás, miszerint az ismert kezdeti halálozási intenzitás melletti normalizált abszolút hibaösszeget minimalizáló momentum becslésnek (**modell-4**) sikerült a legpontosabban visszaadnia a halandósági táblából számolt túlélési valószínűségeket.

Összegzés

A dolgozatban röviden bemutatunk a szakirodalom alapján egy olyan bonyolultabb sztochasztikus életbiztosítási modellt, amely sztochasztikusan modellezi a gazdasági környezetet is a szerződések és a halálozási intenzitás mellett. Ezzel kezelhetővé vált a biztosítótársaságok többféle kockázata is. Bemutatásra kerültek az alapvetőnek gondolt, a szerződéseket és a halálozási intenzitást sztochasztikusan leíró modellek is, és láttuk ezen modellek bővíthetőségét is, mint például a szerződők viselkedésének modellezése. Érdeemes azonban megjegyezni, hogy bár a bonyolultabb, több területet átfogó modellek pontosabb eredményeket adnak, és jobban

csökkentik a biztosítók kockázatát, ugyanakkor ezek sem adnak soha pontos eredményt, és előfordulhat, hogy a felírásuk, kezelésük, karbantartásuk feleslegesen sok erőforrást igényel.

A dolgozatban bővebben a halálozási intenzitás sztochasztikus modelljét vizsgáltuk meg. Figyelmünk középpontjába a pénzügyi területeken alkalmazott Cox–Ingersoll–Ross-modell (CIR-modell) került. Ezzel igyekeztünk leírni a halálozási intenzitás dinamikáját.

Az elméleti vizsgálódások során kiszámoltuk a CIR-modell várható értékét, szórásnégyzetét és momentumait. A dolgozat szempontjából a CIR-modell hasznos tulajdonsága volt, hogy a pénzügyekben már régóta használatos, mivel így az elemi kötvény árazása alapján meg tudtuk határozni a túlélési valószínűséget a CIR-modellünk paramétereinek a segítségével. Ez a lépés nagyban leegyszerűsítette a becslési modelljeink összehasonlíthatóságát.

Következő lépésként meghatároztuk az élettartam várható értékét és magasabb rendű momentumait abban az esetben, amikor a halálozási intenzitás alakulása CIR-modellel írható le. Ez a számolás szintén a becslési modellek felépítésében játszott fontos szerepet, mint ahogy a halandósági táblából számolt élettartam-momentumok is. Utóbbiakhoz néhány, a diszkrét adatokból momentumokat számító módszert is megemlítettünk.

A CIR-modellünk paramétereinek megbecsléséhez a legkisebb négyzetes becslési módszert és a momentumokon alapuló momentum módszert használtuk fel. Ezekkel a módszerekkel sikerült is jó eredményeket kapnunk az időskori túlélési valószínűségekre. A legpontosabb becslési eredményt az a **modell-4** adta, amelyik esetében a kezdeti halálozási intenzitást adottnak vettük, és a momentumokon alapuló numerikus hibaminimalizálásnál az abszolút eltérések normalizált összegének kerestük a minimumát.

Természetesen maradt több nyitott kérdés és vizsgálható terület is a becsléseket illetően. Érdekes lehet újabb, másfajta becslési módszerek kipróbálása is az adott problémára, és ezzel párhuzamosan vizsgálatra érdemes az is, hogy milyen körülmények vagy feltételek mellett van lehetőség más, esetleg bővebb korintervallumokra kiterjeszteni a becsléseket. Érdekes kérdés lehet, hogy múltbeli kohorsz adatokra mennyire illeszkedik jól a modell, és azokból milyen következtetéseket lehet levonni a jelen korra, illetve az is, hogy milyen eredményt kapunk, ha a mostani nem teljes kohorsz adatokat vetjük alá hasonló vizsgálatnak. Ugyan a 2017-es magyar időskori adatokra jól illeszkedik a CIR-modellel dinamikájú halálozási intenzitás, ez nem jelenti azt, hogy más országok adataira is ilyen eredményt kapnánk, így érdemes lehet különböző (típusú) országokra is összevetni a CIR-modell alkalmazhatóságát.

Röviden összegezve tehát: a dolgozatban képet adtunk az életbiztosítások sztochasztikus modellezéséről, és bemutattuk a halálozási intenzitás és túlélési valószínűség, illetve az élettartam néhány tulajdonságát CIR-modell által vezérelt halálozási intenzitás esetén. Ezek segítségével pedig sikeresen becslöttük az idős korosztályra a 2017-es magyar halandósági tábla adatait.

IRODALOMJEGYZÉK

- Banyár, J. (2016). Életbiztosítás. Budapest: Budapesti Corvinus Egyetem.
- Björk, T. (1997). Interest rate theory. In W. J. Runggaldier, *Financial Mathematics*, Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 1656 (pp. 53–122). Berlin: Springer-Verlag, <https://doi.org/10.1007/bfb0091999> - Letöltés: 2021.10.02
- Bladt, M., Asmussen, S., & Steffensen, M. (2020). Matrix representations of life insurance payments. *European Actuarial Journal*, 10, pp. 29–67., <https://doi.org/10.1007/s13385-019-00222-0> - Letöltés: 2021.10.02
- Buchardt, K., & Møller, T. (2015). Life Insurance Cash Flows with Policyholder Behavior. *Risks*, 3(3), 290–317., <https://doi.org/10.3390/risks3030290> - Letöltés: 2021.10.02
- Cairns, A. J., Blake, D., & Dowd, K. (2006). A two-factor model for stochastic mortality: Theory and calibration. *Journal of Risk and Insurance*, 73(4), pp. 687–718., <https://doi.org/10.1111/j.1539-6975.2006.00195.x> - Letöltés: 2021.10.02
- Chakraborti, S., Schoemer Jardim, F., & Epprecht, E. K. (2017). Higher Order Moments Using the Survival Function: The Alternative Expectation Formula. *The American Statistician*, 73(2), 191., <https://doi.org/10.1080/00031305.2017.1356374> - Letöltés: 2021.10.02
- Christiansen, M. C. (2012). Multistate models in health insurance. *Advances in Statistical Analysis*, 96, pp. 155–186., <https://doi.org/10.1007/s10182-012-0189-2> - Letöltés: 2021.10.02
- Christiansen, M. C., & Djehiche, B. (2020). Nonlinear reserving and multiple contract modifications in life insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, 93, pp. 187–195., <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.05.004> - Letöltés: 2021.10.02
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985). An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices. *Econometrica*, 53(2), pp. 363–384., <https://doi.org/10.2307/1911241> - Letöltés: 2021.10.02
- Dahl, M. (2014). Stochastic mortality in life insurance: market reserves and mortality-linked insurance contracts. *Insurance: Mathematics and Economics*, 35(1), pp. 113–136., <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2004.05.003> - Letöltés: 2021.10.02
- Duffie, D., Filipovic, D., & Schachermayer, W. (2003). Affine processes and applications in finance. *The Annals of Applied Probability*, 13(3), pp. 984–1053., <https://doi.org/10.1214/aoap/1060202833> - Letöltés: 2021.10.02
- Jafari, M. A., & Abbasian, S. (2017). The Moments for Solution of the Cox-Ingersoll-Ross Interest Rate Model. *Journal of Finance and Economics*, 5(1), pp. 34–37. - <https://doi.org/10.12691/jfe-5-1-4>
<http://article.journaloffinanceconomics.com/pdf/jfe-5-1-4.pdf>
- Lee, R. D., & Carter, L. R. (1992). Modeling and Forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87(419), pp. 659–671., <https://doi.org/10.2307/2290201> - Letöltés: 2021.10.02
- Marocco, P., & Pitacco, E. (1998). Longevity risk and life annuity reinsurance. In *Proceedings of the Transactions of the 26th International Congress of Actuaries*, vol. 6. (pp. 453–479). Birmingham, England: Institute of Actuaries.
- Milevsky, M. A., & Promislow, S. D. (2001). Mortality derivatives and the option to annuitise. *Insurance: Mathematics and Economics*, 29(3), pp. 299–318. - [https://doi.org/10.1016/s0167-6687\(01\)00093-2](https://doi.org/10.1016/s0167-6687(01)00093-2) - Letöltés: 2021.10.02
- Móri, T. F. (2011). Élettartamadatok elemzése. Budapest: Typotex Kiadó.
- Olivieri, A. (2001). Uncertainty in mortality projections: an actuarial perspective. *Insurance: Mathematics and Economics*, 29(2), pp. 231–245. - [https://doi.org/10.1016/s0167-6687\(01\)00084-1](https://doi.org/10.1016/s0167-6687(01)00084-1) - Letöltés: 2021.10.02
- Olivieri, A., & Pitacco, E. (2002). Inference about mortality improvements in life annuity portfolios. In *Proceedings of the Transactions of the 27th International Congress of Actuaries*. Cancun, Mexico: Institute of Actuaries.
- Sinkala, W., Leach, P., & O'Hara, J. (2008). Zero-coupon bond prices in the Vasicek and CIR models: Their computation as group-invariant solutions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 31(6), pp. 665–678. - <https://doi.org/10.1002/ma.935> - Letöltés: 2021.10.02
- The Human Mortality Database. (2021. 02. 24). Forrás: <https://www.mortality.org/> - Letöltés: 2021.10.02
- Zeddouk, F., & Devolder, P. (2020). Mean reversion in stochastic mortality: why and how? *European Actuarial Journal*, 10(2), pp. 499–525. - <https://doi.org/10.1007/s13385-020-00237-y> - Letöltés: 2021.10.02