

TÖBB-ÁLLAPOTÚ FRAKCIONÁLIS MODELLEK A BIZTOSÍTÁSBAN

Bodolai Előd István (ELTE-BCE Biztosítási és pénzügyi matematika MSc), elodbodolai@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÓ

A 2010-es években egyre több kutatás középpontjában szerepeltek a frakcionális modellek. Ebben a tanulmányban egy olyan egészségbiztosítási modellt mutatunk be, ahol a biztosítottak egészségügyi állapotát egy Markov-lánc fázistér-elemeinek feleltetjük meg, míg az időparaméternek egy stabilis Lévy-szubordinátor inverzfolyamatát választjuk. Az így nyert duplán sztochasztikus modellben az idő múlását befolyásolhatjuk bizonyos szakaszon felgyorsítva, illetve megállítva azt. Ez a megközelítés konstrukcióját tekintve hasonló a szubordinált Brown-mozgás pénzügyi felhasználásához. A modell gyakorlati jelentőségét és paraméterérzékenységét egy konkrét egészségbiztosítási terméken keresztül mutatjuk be annak árazásában és matematikai tartalékképzésében. A szakirodalom ismertetésén túlmenően az eredményeken néhány helyen pontosításokat, javításokat végeztünk.

SUMMARY

In the 2010s more research focused on the fractional models. In this article we introduce a welfare insurance model where we can represent the insured's health status by a Markov chain with finite state space, in addition we choose an inverse of a stable Levy process for its randomized time parameter. With this double stochastic model we are able to modify the „time-flow” by stopping or speeding up it. This approach is similar to the quantitative application of the subordinated Brownian motion by its construction. The practical significance and the parameter sensitivity of the model are presented by a given health insurance construction calculating its price and mathematical reserve. In addition to the description of the literature, we made clarifications and corrections in some places of the results

Kulcsszavak: frakcionális sztochasztikus differenciálegyenletek, Markov-lánc, Lévy-szubordinátor

Key words: fractional differential equations, Markov chain, Levy subordinator

JEL: C63

DOI: 10.18530/BK.2022.3-4.72

<http://dx.doi.org/10.18530/BK.2022.3-4.72>

Bevezetés

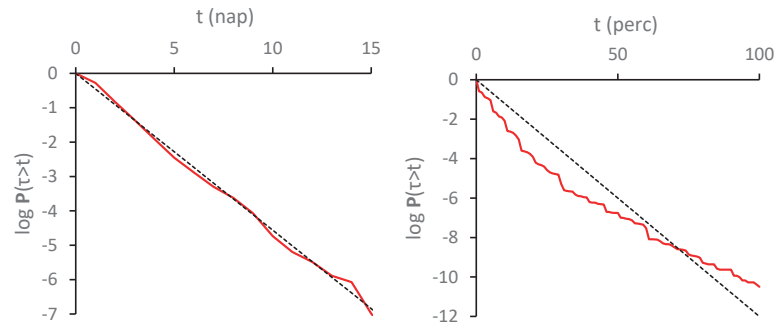
A pénzügyek területén kiemelt feladat az adott pénzügyi instrumentumokban rejlő kockázatok felmérése, értékelése és monitorozása. A kockázattertelékeléshez mind a banki, mind a biztosítási területen klasszikus modellek állnak rendelkezésünkre, gondolva itt például az európai opció árfolyam-alakulását leíró Black-Scholes-moddelle vagy a biztosítóintézet csődvalószínűségére vonatkozó Cramér-Lundberg-moddelle. Ami közös e két modellben, hogy háttérben egy stacionárius, független növekményű sztochasztikus folyamatot feltételeznek: a részvényár geometriai Brown-mozgást követ, a kárszámfolyamat pedig Poisson-folyamat.

De mi történik akkor, amikor új piaci információk hatására pánikszerűen felgyorsulnak a piaci tranzakciók (2022. április 5-én az Európai Bizottság jogállamisági eljárás alá vonta Magyarországot, aminek hatására az euró 371 forintos szintről közel 377 forintos szintre erősödött a bankközi piacon közel 2 óra alatt), vagy amikor az erős szél miatt több kár történik (a 2022. január 30-i szélvihar kapcsán egy napra háromszor annyi kárbejelentés történt, mint a 2021-es négyhónapos viharszezonra)?

Első esetben a valós adatok is azt mutatják, különösen egy részvényár alakulásánál, hogy vannak olyan időszakok, amikor a jegyzések kis eltérést mutatnak, vagy egyáltalán nem változnak (Janczura és Agnieszka, 2009). Az alapmodellek ezeket a megfigyeléseket nem kezelik megfelelően. Első megoldási ötlet a paraméterek általánosabb leírásában rejlik. Ennek egy lehetséges megvalósítása, amikor a Brown-mozgás időparaméterét egy másik sztochasztikus folyamattal helyettesítjük, egy inverz α -stabilis Lévy-szubordinátor folyamattal (Magdziarz, 2009). Az említett idő-átskálással elérünk olyan időszakokat, ahol a Brown-mozgás megáll, viszont a Markov-tulajdonságot és a szemimartingalitást elveszítjük vele. A konstrukciót szokás szubordinált Brown-mozgásnak is nevezni, maga a konstrukció pedig manapság egyre népszerűbb a pénzügyi területen.

A biztosítóintézet szemszögéből egy adott biztosítási szerződés alatti kárfolyamat legalább ennyire fontos. A klasszikus Poisson-folyamat azonban itt sem tud eleget tenni néhány – szintén valós adatokon nyugvó – megfigyelt viselkedésnek. Az ugrások között eltelt idők itt független exponenciális eloszlású változók, ami a fenti szélvihar esetén ellentmond az intuíciónknak. Sok esetben a károk között eltelt idő jellemzően vastagabb farkú, szubexponenciális eloszlást követ. Ezt demonstrálja az R-ben elkészített 1. ábra.

1. ábra: a) A dán tűzkárok és b) a chicagói autóbalesetek szomszédos káridőpontjai között eltelt idők logaritmikus túlélésfüggvényei (összehasonlítva az exponenciális eloszlás túlélésfüggvényével)



Forrás: saját szerkesztés

Az 1.a) ábrát a dán tűzkárok 1980. január 1. és 1990. december 31. közötti adatbázisára alapozva készítettük, és az időben szomszédos tüzesetek között eltelt időhosszak túlélésfüggvényét ábrázolja logaritmikus skálán. A vizsgált évtizedben mintegy 2 167 megfigyeléssel tudtunk számolni. A referenciaegyenes egy exponenciális eloszlás túlélésfüggvénye, ehhez mérten az adatsornál a Poisson-folyamat feltételezés teljesen helytállóan bizonyul.

Az 1.b) ábra elkészítéséhez a chicagói autóbalesetek 2015. szeptember 1. és 2022. április 9. közötti károkat tekintettük a nappali időszakban 9:00 és 17:00 között (291 803 megfigyeléssel). Ugyanúgy a balesetek között eltelt idő túlélésfüggvényét ábráztuk logaritmikus skálán, itt az eloszlás jellege inkább szubexponenciálisnak mondható.

Ez utóbbi megfigyelést szintén követné a már ismertetett módszer, ha a Poisson-folyamatot át-időskálazzuk egy inverz stabilis Lévy-szubordinátorral. Ezzel közelebb kerülünk a valósághoz: lesznek olyan időszakok, amikor „megáll az idő”, és amikor felgyorsul, több kár következik be. Az ugrások között eltelt idő Mittag–Leffler-eloszlású lesz, ami az exponenciálisnál vastagabb farokeloszlással bír. A frakcionális Poisson-folyamattal és a biztosítási alkalmazhatósággal, a rizikófolyamattal részletesen foglalkozik Kumar et al (2020).

Az így megalkotott duplán sztochasztikus rendszerek frakcionális általános elnevezése gyakorlatilag a sztochasztikát leíró frakcionális differenciálegyenletekkel magyarázhatók, amely reprezentációkban megjelennek nem csak egész rendű deriváltak is.

Most vizsgáljuk speciálisan az egészségbiztosítási szerződések csoportját. Ezen termékek aktuáriusi árazásának egyik központi eleme a biztosítottak egészségügyi állapotának felmérése és az állapotok közötti átmenetek (megbetegedés, gyógyulás, rokkantság, elhalálozás) modellezése. Ehhez természetes megközelítést adhatnak a folytonos idejű, véges állapotterű homogén Markov-láncok, amennyiben az állapotokat a biztosított – szerződésben is megkülönböztetett – egészségügyi állapotaival feleltetjük meg.

Bár az említett tulajdonságú Markov-láncoknak széles körű irodalma van, analitikailag

leírhatók, mégis az egészségbiztosítási területen ezek a viselkedések furcsának, irreálisnak bizonyulnak. Gondolunk itt arra, hogy – egyes biztosítottak esetén – a valóságban a megbetegedés valószínűsége nagyban függ az életkortól, a rehabilitáció pedig mind az életkortól, mind a betegségben addig eltöltött időtől. Ezt a jelenséget egy Markov-lánc nem tudja helyén kezelni, éppen a Markov-tulajdonság miatt az állapotváltozások között eltelt idők független exponenciális eloszlást követnek, így a modell csak az aktuális állapotot veszi figyelembe, a betegségben eltöltött időt már nem.

Másik észszerű feltételezés, hogy amennyiben a biztosított egészségügyi állapota leromlik, a kezelése során felszínre kerülhet több – korábban még nem diagnosztizált – betegsége, amire a szerződés fedezetet nyújt, és amit a diagnózistól számított rövid időszakon belül ellátnának. Ezzel párhuzamban, ha az egy állapotban eltöltött időt exponenciális eloszlás helyett olyan eloszlásúnak tekintenénk, mely a farkakra nagyobb hangsúlyt helyez, az modellként szolgálna mindazon egyénekre, akik szokatlanul gyorsan vagy lassan haladnak át az állapotokon. Ebbe implicit beleérthetjük a biztosító szemszögében egyik legrelevánsabb hosszúélet-kockázatot.

A problémát 3 állapotra (egészséges, rokkant, elhalálozott) tárgyalja Zadeh et al (2014). Megoldásként itt egy három-állapotú nem-homogén szemi-Markov-modellt vizsgálunk. A konstrukcióhoz egy homogén Markov-lánc állapotterét növelik meg, ezzel szabályozva a varianciát. A halálozás időpontjának eloszlása ekkor fázistípusú eloszlást követ.

E tanulmány keretében egy másik modellt mutatunk be, mely kezelni képes az említett jelenségeket. Nevezetesen a már közölt gondolatmenet segítségével azt a duplán sztochasztikus rendszert tekintjük, ahol magának a Markov-láncnak az időparaméterét feleltetjük meg egy α -stabilis Lévy-szubordinátor inverzfolyamatának. Az így nyert konstrukcióval az idő telését befolyásoljuk a Markov-modell esetén is bizonyos szakaszokon megállítva, illetve felgyorsítva azt.

A modell részleteiben fellelhető Hainaut (2021) cikkében. Ezen összefoglaló lapjain is erősen támaszkodunk az ott leírtakra, ám több helyen pontosítottuk, javítottuk az abban foglalt eredményeket. Mint látni fogjuk a tanulmány további oldalain is, az így megalkotott modell valóban visszatükrözi a fent leírt elvárásokat.

A tanulmányban részleteiben megfogalmazzuk, bemutatjuk a fent nevezett frakcionális egészségbiztosítási modellt, adott paraméterek mentén beárazzuk, illetve aktuáriusi szemszögből értékeljük azt tetszőleges időpontban (vagyis matematikai tartalékokat határozzunk meg).

Mint már említettük, a sztochasztikus átskálázás hátránya az, hogy a Markov- és szemimartingál-tulajdonságok csak a kezdeti megkötési időpontban teljesülnek, későbbi időpontokban nem áll rendelkezésünkre zárt képlet az értékeléshez. Matematikailag árazni ezért csupán a kötvény aláírásának időpontjában tudunk.

A későbbi időpontokra megoldást jelenthet a Monte-Carlo-szimuláció, azonban az összetett sztochasztika kétszeresen összetett szimulációhoz vezetne, ami rendkívül számolásigényes. Ezt a problémát ezen összefoglaló lapjain belül úgy kívánjuk orvosolni, hogy

a frakcionális Markov-lánc folyamatot feltételesen nézzük a szubordináció filtrációjára. Ezekkel az eredményekkel a tartalék szimulációja leeredukálódik egy szimulációs ágra, a Lévy-folyamatéra, ezzel nemcsak fair díjat, hanem a biztosítási szerződések tetszőleges időpontbeli értékét (a matematikai tartalékot) is meg tudjuk becsülni.

A Markov-modell

Az egyszerűsített modellben a biztosítottak egészségügyi állapotát reprezentáljuk a $(\theta_t)_{t \geq 0}$ folytonos paraméterű homogén Markov-lánccal, ahol az állapotér az $I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ halmaz. Az átmenetvalószínűség-függvény legyen $p_{i,j}(t) = \mathbb{P}(\theta_t = j \mid \theta_0 = i)$, melyre teljesül

$$(1) \quad p_{i,j}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} p_{i,j}(t) = \delta_{i \neq j}.$$

Az átmenetvalószínűség-mátrix ebből következően

$$(2) \quad \mathbf{P}(t) = [p_{i,j}(t)]_{i,j=0,0}^{n,n},$$

a folyamat természetes filtrációja pedig $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$. Jelölje továbbá a 0 helyen vett deriváltakból álló intenzitásmátrixot \mathbf{Q} , melynek főátlóbeli elemeiről megköveteljük, hogy végesek legyenek.

További jelöléseinkben legyenek az $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ vektorok az \mathbb{R}^{n+1} tér azon bázisvektorai, ahol \mathbf{e}_i i -edik komponense 1 , a többi 0 , \mathbf{I}_n az n -elemű csupa 1 vektor, \mathbf{I}_n pedig az $n \times n$ méretű egységmátrix.

Az egyszerűsített alapmodellünkben háromféle pénzáramot fogunk megkülönböztetni úgy, hogy a Markov-lánc állapotai pontosan e három pénzcsoport mértékében különbözzenek egymástól. Fontos feltételünk továbbá, hogy a kifizetések időben folytonosan teljesülnek. Tegyük fel, hogy a biztosító c_i díjat szed, és a_i járadékot fizet (például kórházi napi ellátásra) az $i \in I$ állapotú biztosítottaknak, továbbá az $i \rightarrow j$ ($i \neq j$) állapotátmenet esetén $d_{i,j}$ mértékű egyszeri kifizetést nyújt (például egy műtét elvégzéséhez). Így persze $d_{i,i} = 0$ minden $i \in I$ esetén. Vezessük be az alábbi mátrixokat:

$$(3) \quad \mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_n)^\top, \quad \mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)^\top, \quad \mathbf{D} = [d_{i,j}]_{i,j=0,0}^{n,n}.$$

Tegyük fel, hogy a biztosítást a $t=0$ időpontban kötjük, a tartama pedig legyen $T > 0$. A biztosító költségeitől tekintsünk el. Így amennyiben a folytonos időbeli kamatláb állandó $r > 0$, akkor a kezdeti $t=0$ időpillanatban az ekvivalencia elvvel kalkulált nettó díjra fennáll:

$$(4) \quad \mathbb{E} \left(\int_0^T e^{-rs} \mathbf{e}_{\theta_s}^\top \mathbf{c} \, ds \mid \mathcal{G}_0 \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^T e^{-rs} \mathbf{e}_{\theta_s}^\top \mathbf{a} \, ds \mid \mathcal{G}_0 \right) + \\ + \sum_{i=0}^n \sum_{j \neq i}^n \mathbb{E} \left(\int_0^T e^{-rs} d_{i,j} \, dN_s^{i,j} \mid \mathcal{G}_0 \right),$$

ahol $\int dN_s^{i,j}$ az i - j -számlálófolyamat megváltozásából eredő Lebesgue–Stieltjes-integrál. Az egyenlet bal oldala a várható bevétel, jobb oldala pedig a várható kiadásokat jelenti.

Hasonlóan felírhatjuk tetszőleges $0 \leq t < T$ időpontban a prospektív módon számolt $V^T(t)$ matematikai tartalékot, ami

$$V^T(t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j \neq i}^n \mathbb{E} \left(\int_t^T e^{-r(s-t)} d_{i,j} \, dN_s^{i,j} \mid \mathcal{G}_t \right) + \\ + \mathbb{E} \left(\int_t^T e^{-r(s-t)} \mathbf{e}_{\theta_s}^\top \mathbf{a} \, ds \mid \mathcal{G}_t \right) - \mathbb{E} \left(\int_t^T e^{-r(s-t)} \mathbf{e}_{\theta_s}^\top \mathbf{c} \, ds \mid \mathcal{G}_t \right), \quad (5)$$

vagyis a t időpontban még várható szolgáltatások és bevételek jelenértékének különbségét. Az így definiált tartalékra numerikusan kezelhető explicit formula áll rendelkezésünkre abban az esetben, ha a $\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1}$ mátrix sajátértékeinek valós részei negatívak. Ez tetszőleges $T < \infty$ tartam és $0 \leq t < T$ időpontra

$$V^T(t) = \mathbf{e}_{\theta_t}^\top (\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1})^{-1} (e^{(\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1})(T-t)} - \mathbf{I}_{n+1}) (\mathbf{a} - \mathbf{c}) + (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}) \mathbf{1}_{n+1}, \quad (6)$$

ahol \odot jelöli két azonos méretű mátrix Hadamard-szorzatát. Ha pedig $T = \infty$, akkor

$$V^\infty(t) = \mathbf{e}_{\theta_t}^\top (r\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q})^{-1} (\mathbf{a} - \mathbf{c}) + (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}) \mathbf{1}_{n+1}. \quad (7)$$

Megjegyezzük továbbá, hogy tetszőleges \mathbf{M} négyzetes mátrixra $e^{\mathbf{M}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^k}{k!}$ az exponenciális függvény általánosítottja mátrixok esetére.

Mindebből egyszerűen kiolvashatjuk, hogy például a $\mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}) \mathbf{1}_{n+1}$ képlettel meghatározott díj megfelel a nettó várható érték elvvel kalkulált díjnak bármely tartam esetén ($V^T(0) = 0$, $V^\infty(0) = 0$), viszont a szerződés tetszőleges időpontjában 0 tartalékot ad. Ez a Markov-lánc homogenitásából fakadóan nem meglepő eredmény.

Külön kiemeljük azt az esetet is, amikor maga a szerződés csak az n -edik állapotban köthető, és díj is csak ekkor folyik be (például csak egészséges ügyfeleket kívánunk biztosítani). A díj ezáltal egyszerűen felírható,

$$\mathbf{c} = c \mathbf{e}_n \quad (8)$$

alakú valamely $c > 0$ -val. Az ekvivalenciaegyenletek megoldása c -re véges, illetve végtelen esetben

$$c^T = \frac{\mathbf{e}_n^\top (\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1})^{-1} (e^{(\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1})T} - \mathbf{I}_{n+1}) (\mathbf{a} + (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}) \mathbf{1}_{n+1})}{\mathbf{e}_n^\top (\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1})^{-1} (e^{(\mathbf{Q} - r\mathbf{I}_{n+1})T} - \mathbf{I}_{n+1}) \mathbf{e}_n}, \quad (9)$$

$$c^\infty = \frac{\mathbf{e}_n^\top (r\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q})^{-1} (\mathbf{a} + (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}) \mathbf{1}_{n+1})}{\mathbf{e}_n^\top (r\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{e}_n}. \quad (10)$$

Ezeket behelyettesítve a (6) és (7) egyenletekbe megkapjuk a tartalékra vonatkozó formulát a (8) speciális alakú biztosítási szerződések esetén.

Duplán sztochasztikus rendszerek

A következő szakaszban rátérünk a sztochasztikus időparaméter és a kétszeresen összetett sztochasztikus folyamat ismertetésére. Mindez részletekbe menően megtalálható Sato (1999) irodalmában, így mi csak a leglényegesebb tulajdonságokat említjük.

Legyen az $(U_t)_{t \geq 0}$ egy α -stabilis Lévy-szubordinátor, vagyis olyan Lévy-folyamat, melynek trajektóriája majdnem mindenhol monoton nő, növekményeire pedig fennáll tetszőleges $0 \leq s < t$ esetén az

$$(11) \quad U_t - U_s = (t-s)^{1/\alpha} U_1$$

eloszlásban vett egyenlőség. Itt az U_1 egy speciális α -stabilis eloszlású valószínűségi változó, aminek karakterisztikus függvénye

$$(12) \quad \varphi_{U_1}(t) = \mathbb{E}(e^{itU_1}) = \exp\left(-\cos\frac{\alpha\pi}{2}|t|^\alpha\left(1 - i \operatorname{sgn}(t) \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right),$$

illetve $\alpha \in [0, 1)$.

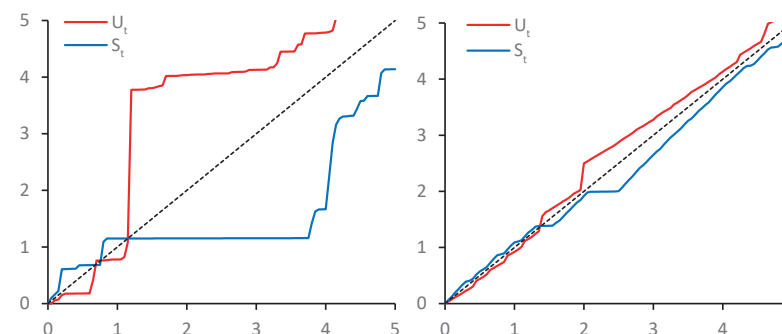
Az $(U_t)_{t \geq 0}$ folyamat természetes filtrációját jelölje $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Ennek segítségével bevezetünk egy új szubordinátort. A jelzett folyamat inverzfolyamata alatt azt az $(S_t)_{t \geq 0}$ folyamatot értjük, amit az

$$(13) \quad S_t = \inf\{\tau \geq 0 : U_\tau \geq t\}.$$

szintelérési idők határoznak meg.

Két ilyen folyamat trajektóriáját szemlélteti a 2. ábra különböző α értékek mellett, pirossal a Lévy-szubordinátort, kézzel annak inverzét. A bal oldalin észrevehetjük azt, hogy az $[1.5, 3.5]$ intervallumon a folyamat megáll. Az ilyen véletlen szakaszokat később az idő megállásával fogjuk azonosítani, ahogy azt a bevezetőben említettük.

2. ábra: α -stabilis Lévy-szubordinátor és inverzfolyamata, a) $\alpha=0.5$, b) $\alpha=0.95$.



Forrás: saját szerkesztés

Érdemes megjegyeznünk, hogy a karakterisztikus függvény konvergenciájából kifolyólag az $\alpha \rightarrow 1$ – limeszel $U_t \rightarrow 1$ sztochasztikusan. Eszerint a későbbiekben az $\alpha=1$ jelöléssel a nem át-ido-skálázott folyamatra kívánunk utalni. Ez az észrevétel a 2. ábrán is visszatükröződik, 1 -hez közeli α mellett a „nagy” ugrás valószínűsége kicsi.

Definícióból következően az új mozgás valóban szubordinátor marad, trajektóriája majdnem biztosan 0 -ból indul, ám a trajektóriák balról folytonosak, jobbról határértékkel rendelkeznek, ezáltal

$$\{S_t \leq \tau\} = \{U_\tau \geq t\}, \quad (14)$$

minden $s \geq 0$ -re $s \leq U_{S_s}$, továbbá az inverzfolyamat nem feltétlenül lesz Lévy-folyamat többé: a független növekményűség és stacionaritás – így a markovitás – így a kivész belőle

Nem szabad szem elől téveszteni továbbra sem, a tanulmány célja a bevezetés alatt álló módszerek biztosítási területen való megszólaltatása. Egy élő szerződés esetében ugyanis elengedhetetlen, hogy azt a tartama alatt bármely időpontban értékelni tudjuk pénzügyi, kockázati szempontból (nem csak a megkötés időpontjában). Ez indokolja, hogy ebben a részben kiemelt hangsúlyt fektetünk olyan feltételes vizsgálatokra, melyek kellő időbeli rugalmasságot biztosítanak, illetve pótolják a korábban megemlített hiányosságokat.

Mindez technikailag azt jelenti, hogy tulajdonképpen feltételesen vagyunk kíváncsiak az $(S_t)_{t \geq 0}$ folyamat növekményeire. Formalizálva valamely $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvényre minden $0 \leq s \leq t$ mellett szeretnénk kiszámolni az

$$\mathbb{E}(g(S_t - S_s) \mid \mathcal{F}_{S_s}) \quad (15)$$

feltételes várható értéket (ahol ez létezik).

Észrevehetjük, hogy tetszőleges $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix esetén a (15)-ben alkalmazott $g(x) = e^{Mx}$ függvénnyel a feltételes mátrix értékű Laplace-transzformáltat kapjuk meg. Hainaut (2021) kiszámolta, hogy ez az eloszlás feltételesen mátrix Mittag–Leffler-eloszlású, pontosabban

$$(16) \quad \mathbb{E}(e^{M(S_t - S_s)} | \mathcal{F}_{S_s}) = \mathbf{E}_{\alpha,1}(\mathbf{M}(t - U_{S_s})^\alpha) \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t\}} + \mathbf{I}_n \mathbb{1}_{\{U_{S_s} > t\}},$$

ahol $\mathbf{E}_{\alpha,\beta}(\mathbf{M}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}$ a mátrix értékű Mittag–Leffler-függvény, valamint $\mathbb{1}_{x \in H}$ jelöli az $x \in H$ esemény indikátor valószínűségi változóját (H valószínűségi mezőn mérhető halmaz).

A tanulmány ezen pontján rátérhetünk a bevezetőben említett konstrukció ismertetésére. Maradva eddigi jelöléseinknél, legyen a $(\theta_t)_{t \geq 0}$ olyan homogén Markov-lánc, mely független az $(U_t)_{t \geq 0}$ és az $(S_t)_{t \geq 0}$ folyamatoktól egyaránt. A természetes filtrációja továbbra is $(G_t)_{t \geq 0}$ átmenetvalószínűség-mátrixának $(P(t))$ elemei teljesítik az (1) kényelmi feltételezést, intenzitás-mátrixának (Q) főátlóbeli elemei pedig végesek.

Ekkor tekintsük a $(\theta_{S_t})_{t \geq 0}$ sztochasztikusan idő-átskálázott folyamatot. Ebben az esetben „értelmes” módon definiálni tudjuk magának a folyamatnak az úgynevezett P_α frakcionális átmenetvalószínűség-mátrixát, ami a

$$(17) \quad \begin{aligned} & \mathbb{P}(\theta_{S_{t_2}} = j | \mathcal{F}_{S_s}, G_{S_{t_1}}) = \\ & = \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{\{\theta_{S_{t_1}} = i\}} \left(\left[\frac{-\alpha \lambda}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{t_1 - U_{S_s}} x^{\alpha-1} E_{\alpha,1}(\mathbf{Q}(t_2 - U_{S_s} - x)^\alpha) dx \right]_{i,j} \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t_1\}} + \right. \\ & \left. [E_{\alpha,1}(\mathbf{Q}(t_2 - U_{S_s})^\alpha)]_{i,j} \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t_2\}} + [\mathbf{I}_{n+1}]_{i,j} \mathbb{1}_{\{t_2 < U_{S_s}\}} \right) \end{aligned}$$

általunk pontosított eredményt felhasználva tetszőleges $s \leq t_1 \leq t_2$ időpontokra teljesíti a

$$(18) \quad P_\alpha(t_1, t_2 | \mathcal{F}_{S_s}) := \left(\mathbb{P}(\theta_{S_{t_2}} = j | \theta_{S_{t_1}} = i, \mathcal{F}_{S_s}) \right)_{i,j=0,0}^{n,n}.$$

megfelelést.

Ezt az alakot látva felfedezhetjük a nem átskálázott Markov-lánc $P(t)$ átmenetvalószínűség-mátrixszal kapcsolatos analógiát, az ottani jelölés szerint csupán a $p_{i,j}(S_{t_2} - S_{t_1})$ függvények feltételes várható értékét nézzük. Szeretnénk jelezni továbbá, a P_α függvény (t, t_2) kettős időargumentuma azt kívánja hangsúlyozni, hogy a szubordinált esetben a $(\theta_{S_t})_{t \geq 0}$ Markov-lánc a t -időparaméter szerinti stacionaritását is elveszíti, úgynevezett inhomogén „rejtett” Markov-lánchoz jutunk.

Frakcionális differenciálegyenletek

A sztochasztikus folyamatok háttérében gyakorta az eloszlásokra vonatkozó, azok „fejlődését” leíró parciális differenciálegyenletek állnak. Ebben az aspektusban szemlélődve egyfajta általánosításra nyílik lehetőségünk, amennyiben értelmeznénk a deriváltakat nem csak egész rendekben is. A kiterjesztési lehetőséget már a XIX. században vizsgálták neves matematikusok (Laplace, Fourier, Riemann, Liouville, Heaviside). Ezen a vonalon jutunk el a frakcionális differenciálegyenletek elméletéhez, amelyeket részletekbe menően numerikus példákon keresztül mutat be Podlubný (1999) könyve.

Kisebb kitérőként megjegyezzük, hogy bevezetőben említett frakcionális modellek frakcionális elnevezése éppen a mögöttük megbúvó frakcionális differenciálegyenletekből fakad.

Ismert példa Einstein 1905-ös eredménye vagy közvetlenül a Fokker–Planck-egyenletek

alapján, hogy a $(B_t)_{t \geq 0}$ Brown-mozgás $p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ sűrűségfüggvényei kielégítik a hővezetési egyenletet:

$$\frac{d}{dt} p(x, t) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} p(x, t), \quad p(x, 0) = \delta(x). \quad (19)$$

Amennyiben pedig tekintjük a (13) folyamattal át-időskálázott $(B_{S_t})_{t \geq 0}$ Brown-mozgást, úgy annak $p_\alpha(x, t)$ sűrűségfüggvényei kielégítik az alábbi frakcionális differenciálegyenletet (Meerschaert és Straka, 2013):

$$D_t^\alpha p_\alpha(x, t) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} p_\alpha(x, t), \quad p_\alpha(x, 0) = \delta_0(x), \quad (20)$$

ahol D_t^α a Caputo-féle frakcionális differenciáloperátor, definíció szerint $0 \leq n-1 < \alpha \leq n$, ($n \in \mathbb{N}$) esetén tetszőleges f függvényre

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-s)^{n-1-\alpha} \frac{d^n f}{ds^n}(s) ds, \quad (21)$$

ahol létezik.

A (18) függvény frakcionális elnevezése hasonlóan a frakcionális differenciálegyenletek témakörével összefüggésben kerül szóba. Ugyanis az idő-átskálázott Markov-láncknál az Kolmogorov-féle differenciálegyenlethez hasonló – immár frakcionális – differenciálegyenlet tudunk megjelölni. Legyen ugyanis tetszőleges $s, x \geq 0$ számok mellett $f(x) = P_\alpha(s, U_{S_s} + x | \mathcal{F}_{S_s})$, amire teljesül, hogy

$$(22) \quad D_x^\alpha f(x) = \mathbf{Q}f(x).$$

Ezt a $D_x^\alpha f(x)$ kifejezést értelmezhetjük úgy, mint az intenzitásmátrix frakcionális analogonját. Az összefüggés háttérben valóban az áll, hogy a Caputo-féle frakcionális differenciáloperátor sajátfüggvénye a Mittag-Leffler-függvény.

Fázistípusú eloszlások

Érdekes kitérnünk arra a speciális esetre is, amikor a rejtett Markov-láncunk állapotterében az egyik állapotot elnyelő állapotként, a többit pedig tranzienst állapotként definiáljuk. A biztosítási területen ezt azzal feleltetjük meg, hogy az egészségbiztosítási szerződés fedezetet nyújt halál esetén is a biztosítottak számára.

Ismert, hogy egy homogén Markov-lánc esetén az elnyelődésig eltelt idő eloszlása fázistípusú eloszlást követ. Az át-időskálázott esetben nagyon hasonló tudunk állítani. Legyen a 0. állapot az elnyelő állapot, és

$$(23) \quad \zeta_\alpha = \inf\{t \geq 0 : \theta_{S_t} = 0\}$$

az elnyelődésig eltelt idő valószínűségi változója. Írjuk fel továbbá az intenzitásmátrixot a következő alakban:

$$(24) \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{q} & \tilde{\mathbf{Q}} \end{pmatrix},$$

ahol $\tilde{\mathbf{Q}}$ a tranzienst állapotokhoz tartozó $n \times n$ -es almátrix. Amennyiben $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^n$ a kezdeti eloszlás vektora a tranzienst állapotokra szorítva ($\pi_k = \mathbb{P}(\theta_0 = k)$, $k=1, 2, \dots, n$), úgy az elnyelődésig eltelt idő úgynevezett frakcionális fázis típusú eloszlást követ, mely kapcsolatban áll a Mittag-Leffler-függvényel, pontosabban

$$(25) \quad \mathbb{P}(\zeta_\alpha \leq t - s \mid \mathcal{G}_{S_s}, \mathcal{F}_{S_s}) = \left(1 - \mathbf{e}_{\theta_{S_s}}^\top \mathbf{E}_{\alpha,1}(\tilde{\mathbf{Q}}(t - U_{S_s})^\alpha) \mathbf{1}_n\right) \mathbb{1}_{\{U_{S_s} \leq t\}}.$$

Frakcionális modell

A frakcionális megközelítésben az előző modellünket módosítjuk annyiban, hogy a determinisztikus időskálát a korábban látottak szerint az α -stabilis Lévy-szubordinátor inverzfolyamatára cseréljük. A jelölések megtartása mellett észrevehetjük, hogy a $t \geq 0$ időpontig rendelkezésünkre álló információ a Markov-láncból és a szubordinációból fakad, vagyis a feltételünk a $(\mathcal{G}_{S_t}, \mathcal{F}_{S_t})$ σ -algebra-rendszerekre vonatkozik. Az \mathcal{F} -re vonatkozó feltételhez hozzáfűzzük azt a megjegyzést, hogy bár az általa reprezentált rejtett sztochasztikus óra a

gyakorlatban nem figyelhető meg, mégis vannak a biztosított egészségügyi viselkedésére, kórképére (pl. megbetegedés) vonatkozóan ismereteink. A legfontosabb tartalma mégis az α paraméter, hiszen ez az egy paraméter befolyásolja az egészségügyi időtelés sztochasztikáját, illetve az állapottranzitok előfordulási gyakoriságát, amit a szimulációk során tovább vizsgálunk. Ez alapján ebben az esetben az (5) tartalékképlet az alábbiak szerint módosul:

$$(26) \quad \begin{aligned} V_\alpha^T(t) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j \neq i}^n \mathbb{E} \left(\int_t^T e^{-r(s-t)} d_{i,j} dN_{S_s}^{i,j} \mid \mathcal{G}_{S_t}, \mathcal{F}_{S_t} \right) + \\ &+ \mathbb{E} \left(\int_t^T e^{-r(s-t)} \mathbf{e}_{\theta_{S_s}}^\top \mathbf{a} ds \mid \mathcal{G}_{S_t}, \mathcal{F}_{S_t} \right) - \\ &- \mathbb{E} \left(\int_t^T e^{-r(s-t)} \mathbf{e}_{\theta_{S_s}}^\top \mathbf{c} ds \mid \mathcal{G}_{S_t}, \mathcal{F}_{S_t} \right). \end{aligned}$$

A tagokat a nem-frakcionális esethez hasonlóan külön megállapíthatjuk. A kifejezések felírásánál Hainaut (2021) eredményeit pontosítottuk a szakdolgozat keretén belül.

Véges $T \leq \infty$ biztosítási tartam esetén (26) tartalék tagjaira teljesül egyrészt

$$(27) \quad \begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_t^T e^{-r(s-t)} \mathbf{e}_{\theta_{S_s}}^\top ds \mid \mathcal{G}_{S_t}, \mathcal{F}_{S_t} \right) &= \frac{\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top}{r} \left(1 - e^{-r(U_{S_t} \wedge T - t)}\right) + \\ &+ \left(e^{-r(U_{S_t} - t)} \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^k \gamma(k\alpha + 1, r(T - U_{S_t}))}{r^{k\alpha + 1} \Gamma(k\alpha + 1)} \right) \mathbb{1}_{\{U_{S_t} \leq T\}}, \end{aligned}$$

másrészt pedig

$$(28) \quad \begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j \neq i}^n \mathbb{E} \left(\int_t^T e^{-r(s-t)} d_{i,j} dN_{S_s}^{i,j} \mid \mathcal{G}_{S_t}, \mathcal{F}_{S_t} \right) &= \\ = e^{-r(U_{S_t} - t)} \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^k \gamma(k\alpha + \alpha, r(T - U_{S_t}))}{r^{k\alpha + \alpha} \Gamma(k\alpha + \alpha)} (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}) \mathbf{1}_{n+1} \mathbb{1}_{\{U_{S_t} \leq T\}}. \end{aligned}$$

Az előző képletekben tetszőleges pozitív s, ω -ra $\gamma(s, \omega)$ jelöli az alsó nem-teljes gamma függvényt, definíció szerint $\gamma(s, \omega) = \int_0^\omega x^{s-1} e^{-x} dx$.

Hasonlóan a nem-frakcionális modellhez, itt is meg tudjuk határozni a tartalékban előforduló tagok értékeit határozatlan tartamú szerződések esetén. A $T \rightarrow \infty$ határátmenetben $\mathbb{P}(U_{S_t} \leq T) \rightarrow 1$, így az integrálok létezése mellett

$$(29) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\int_t^\infty e^{-r(s-t)} \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top ds \mid \mathcal{G}_{S_t}, \mathcal{F}_{S_t} \right) = \\ & = \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top \frac{1-e^{-r(u_{S_t}-t)}}{r} + \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top \frac{e^{-r(u_{S_t}-t)}}{r} (\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q}r^{-\alpha})^{-1}, \end{aligned}$$

illetve ugyanekkor

$$(30) \quad \begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \mathbb{E} \left(\int_t^\infty e^{-r(s-t)} d_{i,j} dN_{S_t}^{i,j} \mid \mathcal{G}_{S_t}, \mathcal{F}_{S_t} \right) = \\ & = \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top \frac{e^{-r(u_{S_t}-t)}}{r^\alpha} (\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q}r^{-\alpha})^{-1} (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}) \mathbf{1}_{n+1}. \end{aligned}$$

Ezen a ponton megjegyezzük, hogy az integrálok létezésének feltétele, hogy $\rho(\mathbf{Q}r^{-\alpha}) < 1$ teljesüljön, ahol $\rho(\mathbf{M})$ jelöli az \mathbf{M} mátrix spektrálsugarát. Ekkor ugyanis

$$(31) \quad \sum_{k=0}^\infty (\mathbf{Q}r^{-\alpha})^k = (\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q}r^{-\alpha})^{-1}$$

Ez valójában összhangban áll az $x \mapsto E_{\alpha,1}(\mathbf{Q}x^\alpha)$ mátrix értékű Mittag-Leffler-függvény Laplace-transzformálhatóságával, amiről tudjuk, hogy létezik azon $\lambda \in \mathbb{C}$ számokra, melyekre $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ és $\rho(\mathbf{Q}\lambda^{-\alpha}) < 1$.

Összefoglalva tehát a frakcionális modell esetén definiált (26) tartalék az alábbi alakba írható tetszőleges $T < \infty$ tartam és $0 \leq t < T$ esetén

$$(32) \quad \begin{aligned} V_\alpha^T(t) &= \frac{1-e^{-r(u_{S_t} \wedge T-t)}}{r} \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top (\mathbf{a} - \mathbf{c}) + \\ & + e^{-r(u_{S_t}-t)} \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top \sum_{k=0}^\infty \mathbf{Q}^k \frac{\gamma(k\alpha+1, r(T-u_{S_t}))}{r^{k\alpha+1}\Gamma(k\alpha+1)} (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \mathbb{1}_{\{u_{S_t} \leq T\}} + \\ & + e^{-r(u_{S_t}-t)} \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top \sum_{k=0}^\infty \mathbf{Q}^k \frac{\gamma(k\alpha+\alpha, r(T-u_{S_t}))}{r^{k\alpha+\alpha}\Gamma(k\alpha+\alpha)} (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}) \mathbf{1}_{n+1} \mathbb{1}_{\{u_{S_t} \leq T\}}. \end{aligned}$$

Ha pedig $\mathbf{Q}r^{-\alpha}$ spektrálsugara 1-nél kisebb, úgy a $T = \infty$ szerződések tartaléka

$$(32) \quad \begin{aligned} V_\alpha^\infty(t) &= \frac{1-e^{-r(u_{S_t}-t)}}{r} \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top (\mathbf{a} - \mathbf{c}) + \\ & + \frac{e^{-r(u_{S_t}-t)}}{r} \mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top (\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q}r^{-\alpha})^{-1} (\mathbf{a} - \mathbf{c}) + \frac{\mathbf{e}_{\theta_{S_t}}^\top}{r^\alpha} (\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{Q}r^{-\alpha})^{-1} (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}) \mathbf{1}_{n+1}. \end{aligned}$$

Amennyiben a kezdeti díjat nettó várható érték elvvel számoljuk, $U_0 = S_0 = 0$, akkor a tartaléka kapott (32) képlet miatt teljesül véges $T < \infty$ időhorizonton, hogy

$$0 = \mathbf{e}_{\theta_0}^\top \sum_{k=0}^\infty \mathbf{Q}^k \frac{\gamma(k\alpha+1, rT)}{r^{k\alpha+1}\Gamma(k\alpha+1)} (\mathbf{a} - \mathbf{c}) + \mathbf{e}_{\theta_0}^\top \sum_{k=0}^\infty \mathbf{Q}^k \frac{\gamma(k\alpha+\alpha, rT)}{r^{k\alpha+\alpha}\Gamma(k\alpha+\alpha)} (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}) \mathbf{1}_{n+1}. \quad (34)$$

Ennek az egyenletnek egy lehetséges megoldása a díjra

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \left(\sum_{k=0}^\infty \mathbf{Q}^k \frac{\gamma(k\alpha+1, rT)}{r^{k\alpha+1}\Gamma(k\alpha+1)} \right)^{-1} \left(\sum_{k=0}^\infty \mathbf{Q}^k \frac{\gamma(k\alpha+\alpha, rT)}{r^{k\alpha+\alpha}\Gamma(k\alpha+\alpha)} \right) (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}) \mathbf{1}_{n+1}.$$

Tegyük fel most is, hogy a szerződésbefogadás és díjelőírás csak a biztosított egészséges n -edik állapotában történik ($\theta_0 = n$). Ezáltal az előző díj csak az n -edik komponensében nem 0 ($\mathbf{c} = c_\alpha \mathbf{e}_n$), pontosabban megegyezik

$$c_\alpha^T = \frac{\mathbf{e}_n^\top \left(\sum_{k=0}^\infty \mathbf{Q}^k \frac{\gamma(k\alpha+1, rT)}{r^{k\alpha+1}\Gamma(k\alpha+1)} \right) \mathbf{a} + \mathbf{e}_n^\top \left(\sum_{k=0}^\infty \mathbf{Q}^k \frac{\gamma(k\alpha+\alpha, rT)}{r^{k\alpha+\alpha}\Gamma(k\alpha+\alpha)} \right) (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}) \mathbf{1}_{n+1}}{\mathbf{e}_n^\top \left(\sum_{k=0}^\infty \mathbf{Q}^k \frac{\gamma(k\alpha+1, rT)}{r^{k\alpha+1}\Gamma(k\alpha+1)} \right) \mathbf{e}_n}. \quad (35)$$

Egy $T = \infty$ szerződésre hasonlóan számolhatunk díjat, egyik kézenfekvő megoldásra hasonló megközelítésben adódik, hogy

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + r^{-\alpha} (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}) \mathbf{1}_{n+1}. \quad (36)$$

Így ha megint feltesszük, hogy szerződésbefogadás és díjbevétel az n -edik állapotban történik, akkor hasonló képlethez jutunk c_α -ra:

$$c_\alpha^\infty = \frac{\mathbf{e}_n^\top (r\mathbf{I} - \mathbf{Q}r^{1-\alpha})^{-1} \mathbf{a} + \mathbf{e}_n^\top (r^\alpha \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} (\mathbf{Q} \odot \mathbf{D}) \mathbf{1}_{n+1}}{\mathbf{e}_n^\top (r\mathbf{I} - \mathbf{Q}r^{1-\alpha})^{-1} \mathbf{e}_n}. \quad (37)$$

Ezen a ponton rávilágítunk arra a tényre, hogy az imént számolt (35) és (37) értékek $\alpha = 1$ -re visszaadják a nem-frakcionális modellben hasonlóan megadott (9) és (10) díjakat.

Paraméterbecslések

Ebben a szakaszban röviden szót ejtünk a modell paramétereinek természetéről, becslési eljárásukról, amit Hainaut (2021) is javasol.

A szerződésben rögzített pénzáramon és a piaci hozamon túlmenően a legnagyobb kihívást itt a kettős sztochasztikát meghajtó α (mint a rejtett sztochasztikus óra), illetve a \mathbf{Q} (mint az állapotok közötti átmenetvalószínűségek reprezentánsa) paraméterek kijelölése jelenti.

A biztosítónak azonban rendelkezésre állnak a biztosítottak időbeli kárigényei. Ezáltal elegendő csupán aktuáriusi módszerekkel megbecsülni a $P_\alpha(0, s | \mathcal{F}_0)$ átmenetvalószínűségeket adott s időpontokban. A modell gyengesége is ezen a téren nyilvánul meg leginkább, a fentnevezett függvény becslésére ugyanis nem ismerünk sztenderd eljárást, így további kutatásokra van szükség. A gyakorlatban azonban gondolhatunk olyan jogilag megengedett eszközökre, mint a kor, életmód, egészségi állapot szerinti differenciálásra a már meglévő adatok alapján.

Amennyiben rendelkezésünkre állna $P_\alpha(0, s | \mathcal{F}_0)$, úgy a (18) egyenletből kiindulva a keresett paraméterértékek már a legkisebb négyzetek módszerével becsülhetők a következők szerint. Ha

$$(38) \quad A(s | \alpha, \mathbf{Q}) = P_\alpha(0, s | \mathcal{F}_0) - E_{\alpha,1}(\mathbf{Q}s^\alpha),$$

akkor az $\hat{\alpha}$, $\hat{\mathbf{Q}}$ paramétereket az

$$(39) \quad (\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{Q}}) = \arg \min_{\alpha, \mathbf{Q}} \text{tr}(A(s | \alpha, \mathbf{Q})^\top A(s | \alpha, \mathbf{Q}))$$

minimum adja meg.

Szimulációk

Más megközelítésben szeretnénk illusztrálni a módszert a díjmeghatározásra és a tartalék szimulálására egy olyan biztosítási szerződés esetén, mely feltételei között pénzügyileg 4 állapotot különböztet meg egymástól. Mindeközben érzékenységvizsgálatot is végzünk az idő-átskálást biztosító α paraméter szerint.

Tehát tegyük fel, hogy a szerződés kétféle betegségre nyújt fedezetet (1. és 2. állapot), valamint halál esetén (0. állapot) egyszeri kifizetést nyújt. A megkötés pillanatában a biztosított "egészségesnek" (3. állapot) minősül, díjat csak ebben az állapotban fizet. A Markov-lánc átmenetvalószínűség-, illetve intenzitásmátrixa alakuljon az alábbiak szerint

$$(40) \quad P(1) = \begin{pmatrix} \square & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \square & 0.1 & 0.5 & 0.05 & 0.35 \\ \square & 0.05 & 0.1 & 0.7 & 0.15 \\ \square & 0.01 & 0.04 & 0.1 & 0.85 \end{pmatrix},$$

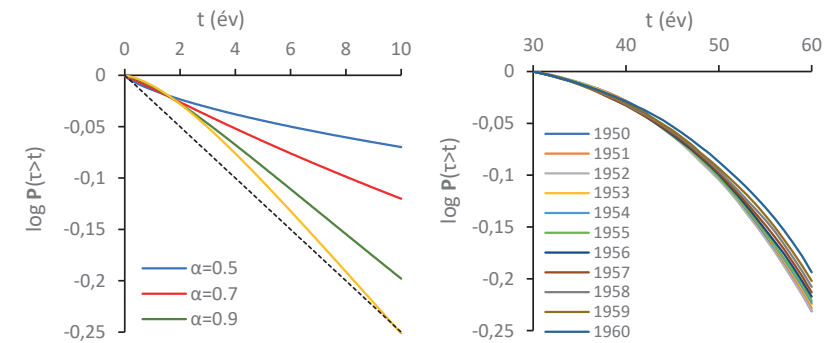
amivel

$$(41) \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \square & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ \square & 0.1362 & -0.7160 & 0.0460 & 0.5338 \\ \square & 0.0495 & 0.1653 & -0.3728 & 0.1580 \\ \square & 0.0047 & 0.0505 & 0.1298 & -0.1850 \end{pmatrix}.$$

A (40) átmenetvalószínűségmátrix elemei szerint az első betegség súlyosabbnak minősül, amennyiben a halálozási valószínűségeket vesszük figyelembe, ellentétben azzal, hogy a 2. állapotból jelentősen nagyobb a felépülési valószínűség.

Ezekből kiindulva a túlélési valószínűség (25) formulából adódik (a kezdeti állapot a 3. állapot), ennek logaritmusát pedig különböző α paraméterszintek mellett a 3.a) ábrán rajzoljuk ki. Ahogy a képen is látszik, nagyobb α érték mellett a túlélés esélye csökken. Azt is megfigyelhetjük, hogy az ilyen átmenetvalószínűségekre a nem átskálzott eset ($\alpha=1$) fázis típusú eloszlása exponenciálisnál gyorsabban lecsengő farokeloszlással bír, ami a tényleges halálozási adatokon megfigyelhető, amint a 3.b) ábrán is mutatjuk.

3. ábra: a) A négy-állapotú frakcionális egészségbiztosítási modell logaritmikus túlélésfüggvénye különböző α szintek mellett, valamint b) az 1950-1960 között született 30 éves korukat megélő magyar lakosság túlélésfüggvénye a T tartam függvényében.



Forrás: saját szerkesztés

1. táblázat: A spektrálsugarak értéke különböző α szintek mellett a vizsgált példában, illetve az α -khoz tartozó határkamatláb

α	$\rho(Qr^{-\alpha})$	Határkamatláb
0.5	4.196	52,82%
0.7	8.461	63,39%
0.9	17.060	70,15%
1	24.226	72,68%

Forrás: saját szerkesztés

A következőkben tekintsük a kockázatmentes piaci hozamgörbét $r=3\%$ -on vízszintesnek. Ez alapján kiszámoljuk a konkrét példa szerinti $Qr^{-\alpha}$ spektrálsugarát különböző α értékek mellett, melyeket az 1. táblázatban foglaltunk össze.

Mivel ezek rendre 1 fölött alakulnak, előfordulhat, hogy a határozatlan tartamra adott (33) egyenlőség nem teljesül (nem létezik az integrál), így nem alkalmazhatjuk következetesen a tartalékra és így a díjakra vonatkozó aszimptotikus szimulációkat végtelen időhorizonton a frakcionális modellek esetén. Itt ismét hangsúlyozzuk, hogy az $\alpha=1$ esetben már nem a $\rho(Qr^{-\alpha}) < 1$ feltételre van szükség a (7) fennállásához, hanem a $Q-rI$ mátrix sajátértékeinek negativitására, amit természetes módon maga után von a spektrálsugarakra tett feltétel.

Ezen a ponton érdemes megemlítenünk, hogy a (31)-re tett spektrális feltételünkből meghatározhatjuk azt a határkamatlábat, ami fölötti bármely kamatláb esetén biztosan létezik a határozatlan tartamú szerződéseknek (33) és (7) alakú tartalék-előállítás. Ez könnyen számolható az alábbi képlet szerint:

$$(42) \quad r = \rho(Q)^{1/\alpha}.$$

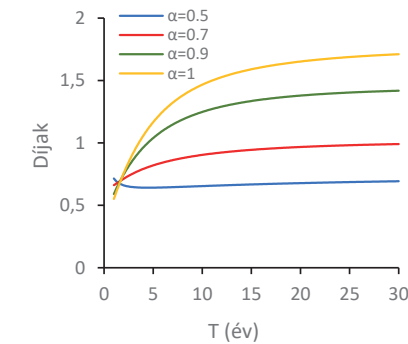
Az α szerinti értékeit szintén az 1. táblázatban jelenítettük meg. Láthatjuk, hogy nagyságrendben (jellemzően 50% fölött) az empirikus adatokat bőven meghaladó értékeket kapunk. Ezen átmenetvalószínűségek mellett nem képezzük tartalékot a határozatlan tartamú biztosításokra.

Tegyük fel, hogy a biztosítási szerződésben foglalt pénzáramok a következők:

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

Itt a számok valamely monetáris egységeknek feleltethetők meg.

A feltételünk miatt a díj $c^T = (0, 0, 0, c)$ alakú, ahol c pontos értékét (35) képlet szerint számolhatjuk. Az eredményeket a 4. ábrán jelenítjük meg különböző α szintek és $T \in [1, 20]$ tartamok mellett.

4. ábra: a) A négy-állapotú frakcionális egészségbiztosítási modell díja a T tartam függvényében különböző α szintek mellett.

Forrás: saját szerkesztés

2. táblázat: A nettó díjak számszerű adatai a vizsgált példában.

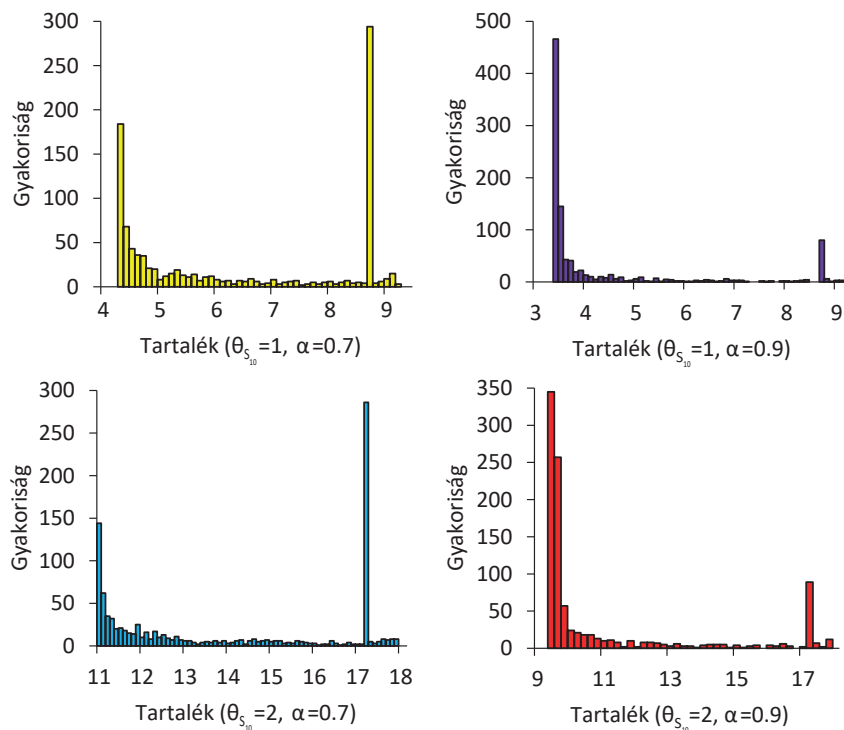
α	$T=1$	$T=5$	$T=10$	$T=20$	$T=30$	$T=\infty$
0.5	0.715	0.642	0.654	0.678	0.693	-
0.7	0.662	0.820	0.904	0.967	0.991	-
0.9	0.591	1.039	1.248	1.379	1.418	-
1	0.551	1.166	1.467	1.652	1.711	1.761

Forrás: saját szerkesztés

A korábbi aszimptotikára tett megjegyzésünk ezen ábra esetén éppen azt jelenti, hogy a díjszintek $T \rightarrow \infty$ esetén $\alpha < 1$ értékekre nem feltétlenül konvergálnak. Azonban tetszőleges véges T érték mellett a díjszintek meghatározhatók. A kalkulált díjak számszaki értékeit a 2. táblázatban mutatjuk ki. Megfigyelhetjük, hogy magasabb α szint mellett magasabb díjat kér a biztosító. Ez a lecsökkent túlélési valószínűséggel magyarázható, valamint az elhalálozással járó magas kifizetésekkel.

Végül szemléltetjük egy $T=20$ évre szóló biztosítási szerződés $t=10$ évre vonatkozó tartalékát a (32) formula szerint. Ehhez az R program stabledist programcsomagjának segítségével 1 000 α -stabilis Lévy-szubordinátor inverzfolyamatot szimuláltunk különböző α értékek mellett, valamint megnéztük a különbséget azok között az esetek között, amikor a biztosított $t=10$ időpontban az 1., illetve 2. "beteg" állapotokban van.

5. ábra: Egy $T=20$ tartamú szerződés szimulált tartalékai $t=10$ -ben különböző α szinteken és állapotokban



Forrás: saját szerkesztés

Az 5. ábra négy szimuláció hisztogramját mutatja $\alpha=0.7$ és 0.9 értékek mellett akkor, amikor $\theta_{s_{10}}=1$, illetve $\theta_{s_{10}}=2$.

3. táblázat: Tartalékszimulációk eredményének elemzése különböző α szintek és $\theta_{s_{10}}$ kezdőállapotok mellett

$\theta_{s_{10}}$	α	Átlag/Érték	Szórás	Kvantilis	
				5%	95%
1.	0.5	7.582	1.438	4.998	8.639
	0.7	6.190	1.888	4.232	8.639
	0.9	4.205	1.645	3.343	8.639
	1	2.804	-	-	-
2.	0.5	15.817	1.984	12.284	17.279
	0.7	14.061	2.674	11.040	17.280
	0.9	10.932	2.536	9.550	17.279
	1	8.624	-	-	-

Forrás: saját szerkesztés

Mint láthatjuk mind a négy esetben, az eloszlás bimodális. Amikor $\theta_{s_{10}}=1$, akkor az egyik csúcás 8.64 értéknél alakul, ami azon szimulációk során jön létre, amikor $U_{s_{10}} \geq 20$, vagyis amikor a $t \in [10, 20)$ intervallumon megáll az idő, a pénzáram így csak a megfelelő komponense járadék formában. A másik eloszláscsúcás magából az U_{s_t} folyamat véletlen trajektóriájából fakad akkor, amikor $U_{s_{10}} < 20$.

$\theta_{s_{10}}=2$ feltétel esetén hasonló megállapítást tehetünk, az egyik csúcás a 17.28 érték, míg a másik hasonlóan a tiszta véletlen folyamat származéka.

A 3. táblázatban számszerűen foglaljuk össze még több α érték mellett a szimulációk eredményeit (átlag, szórás, 5%-os és 95%-os kvantilisek).

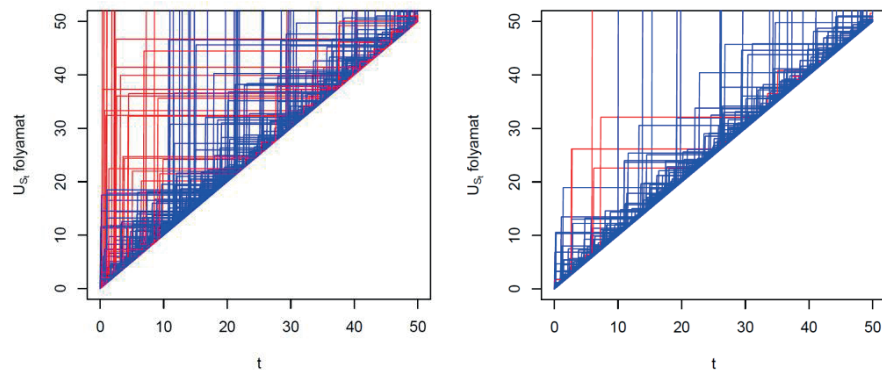
Kiolvashatjuk, hogy a 95%-os kvantilisek is többnyire a $U_{S_{10}} \geq 20$ szimulációs esetekben kapott speciális tartalékértékek körül alakulnak. Jelezzük továbbá azt is, hogy $\alpha=1$ esetben a tartalék értékét a (6) és (7) formulák szolgáltatják számunkra, amit konkrét érték lévén nem szimulálunk, így a szórást és kvantiliseket ott nem értelmezzük.

4. táblázat: A $[10,20]$ intervallumon való "időmegállásnak" relatív gyakorisága 10 000 trajektóriaszimulációból különböző α szintek mellett.

α	$U_{S_{10}} \geq 20$ gyakorisága
0.5	49.7%
0.7	26.2%
0.9	6.3%

Forrás: saját szerkesztés

6. ábra: Az $(U_{S_t})_{t \geq 0}$ folyamat trajektóriaszimulációi a) $\alpha=0.7$ és b) $\alpha=0.9$ értékekre



Forrás: saját szerkesztés

Érdemes arra is kitérnünk az 5. ábra kapcsán, hogy különböző α értékek mellett a szimulációk mekkora részében fordult az elő, hogy a trajektóriák esetén $U_{S_{10}} \geq 20$ egyenlőtlenséget tapasztaltunk. E vizsgálat eredményeit táblázatban foglaljuk össze, ahol láthatjuk 10 000 folyamatszimulációból, hogy az α érték növekedtével csökken a várható előfordulása az folyamat órája tartós megállásának. A 6. ábrán pedig két α érték mellett rajzoltunk ki 100 trajektóriát, ezek közül pirossal emeltük ki azokat, ahol a vizsgált $U_{S_{10}} \geq 20$ esemény áll fenn.

Itt azt is láthatjuk, hogy $\alpha \rightarrow 1$ - tartással a folyamat jobban közelíti a 45°-os egyenest, ami persze korábbi megállapításunkkal áll összhangban, miszerint a determinisztikus idő szerinti folyamatot közelítjük.

Végül megemlítjük, hogy a modell felépítéséből fakadóan alkalmas a klasszikus egészségbiztosítási termékek árazására. Ebben az esetben a díjkalkuláció "jósága" csupán a halandósági valószínűség közelítésével ekvivalens. Más aspektusban arra vagyunk kíváncsiak, hogy a frakcionális fázis típusú eloszlások (és így Mittag–Leffler-függvény) hogyan közelítik a tapasztalati túlélési valószínűséget.

Reflektálva a 3.b) ábrára a hatás ellentétes, a frakcionális modell a tiszta halálózást nem tudja leírni, így ebben az esetben további javítások szükségesek a modellt illetően.

Összefoglalás

Visszaulva e szakdolgozat bevezetőjében foglaltakra, célunk egy olyan egészségbiztosítási modell felépítése volt, mely szerkezetéből fakadóan képes a valóságban tapasztalt tényeket visszaadni. Itt jelöltük meg elvárásunként elsősorban a túlélésfüggvény szubexponenciális jellegét, a múlttól való részbeni függést és a kellő rugalmasságot egy biztosítási szerződésben foglalt modellparaméterekre vonatkozóan (gondolva itt az egészségi állapotokra és a biztosító vállalt kötelezettségeire egyaránt).

Mindezen várakozásainkat sikerült kielégítenünk egy α -stabilis Lévy-folyamat inverzfolyamatával át-időparaméterezett Markov-lánccal. Az új sztochasztikus óra ismert tulajdonságaira támaszkodva láttuk, hogy elnyelő állapottal rendelkező rendszer esetén a frakcionális fázis típusú eloszlás Mittag–Leffler-eloszlás, az új rendszer pedig kielégíti a frakcionális Kolmogorov-féle differenciálegyenletet. Hasonló megfontolással jutottunk arra, hogy a díj meghatározásában lényeges szerepet tölt be a biztosított egészségügyi állapotának legpontosabb meghatározása már a szerződéskötés pillanatában (ezzel összefüggésben a megfelelő paraméterek megállapítása). Mégis feltételeesen vizsgálódva az idő- és állapotváltozásra, valamint az α -stabilis folyamatokra a biztosítási szempontból leglényegesebb információk adaptálhatók maradtak a későbbi időkre.

Ez tette lehetővé számunkra, hogy az árazáson túl tetszőleges időpontban értékelni tudjuk az adott szerződést. A nem megfigyelhető sztochasztikus órával kapcsolatos ismeretek hiányában akár Monte-Carlo-szimulációval helyettesítve megkaphatjuk az adott időpontbeli tartalék várható eloszlását.

Kritikák, lehetséges általánosítások

Bár a felépített modellt vizsgáltuk olyan szempontokból, mint paraméterérzékenység, tartalékszimuláció, mégis a gyakorlati alkalmazhatóság területén gátakba ütközünk.

Egyik korlátját jelenti ugyanis a duplán sztochasztikus rendszer átmenetvalószínűsége-

inek megbecslése egy adott szerződő esetén, ahogy erről a paraméterbecslések részénél szót ejtettünk. Ennek megbecslése valós adatsorokon sarkalatos pont, a modell szempontjából fontos paraméterek becsléséhez elengedhetetlen. E kihívás feloldására egyelőre nem ismerünk általános módszert.

Mint azt a szimulációk bemutatásának végén láttuk, a modell az életbiztosítást jelentő speciális esetét nem tudja megfelelően kezelni. Ennek a problémának a javítására Bladt (2021) cikke vállalkozik azt a gondolatmenetet követve, hogy a sztochasztikusan át-időskálázott folyamatot extrán át-időskálazzuk egy determinisztikus függvénnyel. Ennek köszönhetően nyerünk még egy szabadsági fokot rugalmasság terén, így a túlélésfüggvény farokeloszlása kezelhetővé válik.

Ez a gondolatmenet az általános több-állapotú frakcionális modell esetén is kézenfekvő lenne, bár a képletek számolhatósága ekkor nagyban bonyolódik. Ezen elképzelés vizsgálatára az egészségügyi adatok bizalmas jellegéből fakadóan sajnos nem tudunk valós támasztékokat nyújtani, ezzel az egészségügyi kockázatok szubexponenciális ideológiája is megalapozatlan marad.

Más jellegű kitekintést nyújt magában a Lévy-folyamatban rejlő matematikai tulajdonsághalmaz. A felépített modellben speciálisan Lévy-szubordinátorokat tekintettünk, vagyis amikor $\alpha < 1$. Felmerül a kérdés, mi történne akkor, ha a folyamat stabilitási indexe 1 fölötti lenne, esetleg tetszőleges Lévy-folyamat szintelérési idejét tekintenénk a Markov-lánc sztochasztikus órájának?

Ezekben az esetekben már nem feltétlenül tudnánk zárt képletet adni a tartalékokra, így a díjra sem. A számolások ugyanis merően a (14) halmazegyenletre építettek.

IRODALOMJEGYZÉK

- Bladt, Martin (2021): Fractional inhomogeneous multi-state models in life insurance, *Scandinavian Actuarial Journal*, pp. 1-22. <https://doi.org/10.1080/03461238.2021.1998921>
- Hainaut, Donatien (2021): A fractional multi-states model for insurance, *Insurance: Mathematics and Economics* 98, pp. 120-132. <https://doi.org/10.1016/j.insmathco.2021.02.004> Letöltés: 2022.10.17.
- Janczura, J., and Agnieszka, W. Subdynamics of financial data from fractional Fokker–Planck equation (2009): *Acta Physica Polonica B* 40, pp. 1341-1351.
- Kumar, Arun – Leonenko, Nikolai – Pichler, Alois (2020): A. Fractional risk process in insurance, *Mathematics and Financial Economics* 14, pp. 43-65. <https://doi.org/10.1007/s11579-019-00244-y> Letöltés: 2022.10.17.
- Magdziarz, Marcin (2009): Black-Scholes formula in subdiffusive regime, *Journal of Statistical Physics*, Vol. 136, pp. 553-564. <https://doi.org/10.1007/s10955-009-9791-4> Letöltés: 2022.10.17.
- Meerschaert, Mark M. – Straka, Peter (2013): Inverse stable subordinators, *Mathematical modelling of natural phenomena*, Vol. 8, No. 2, pp. 1-16. <https://doi.org/10.1051/mmnp/20138201> Letöltés: 2022.10.17.
- Podlubny, Igor (1999): *Fractional Differential Equations*, Academic Press.
- Zadeh, Armin Hassan – Jones, Bruce L. – Stanford, David A. (2014): The use of phase-type models for disability insurance calculations, *Scandinavian Actuarial Journal*. <https://doi.org/10.1080/03461238.2012.761645> Letöltés: 2022.10.07.
- <https://www.portfolio.hu/deviza/20220405/nagyon-csunyan-esett-a-forint-a-jogallamisagi-eljaras-hirere-537589> Letöltés: 2022. 04.30.
- <https://mabisz.hu/harom-es-fel-milliardos-szamlat-hagyott-maga-utan-a-januar-vegi-vihar/> Letöltés: 2022. 04.30.
- <https://data.cityofchicago.org/Transportation/Traffic-Crashes-Crashes/85ca-t3if> Letöltés: 2022.04.24.
- <https://www.mortality.org/> Letöltés: 2022.05.04.